

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2 курс,
3 семестр
ЛЕКЦИИ

Домрина Александра Владимировна

4.09.08

Лекция 1

1. Понятие числового ряда

$\{a_n\}$ - числовая последовательность
Порядоченное выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*) - ЧИСЛОВОЙ РЯД.
 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ - n-я частичная сумма
 a_k - k-й член ряда (*)

Если $\exists$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд (*) называется сходящимся, а величина $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется суммой ряда.
Если последовательность $\{S_n\}$ расходится, то ряд (*) называется расходящимся.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ - геометрическая прогрессия.

$$S_n = \begin{cases} n, & q=1 \\ \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится $\Leftrightarrow |q| < 1$ (при этом $S \text{ ряда} = \frac{1}{1-q}$)

Свойства:

1. Линейность. Если ряд (*) сходится к сумме S и c - произвольное число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ с.к. к сумме cS .

$$\left(\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow cS \right)$$

2. Аддитивность. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$ (2 сходящихся ряда). Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_a + S_b$.
 $\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow S_a + S_b \right]$

Замечание: Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на их сходимость.

2. Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд (*) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \quad |S_n - S_{n+p}| < \varepsilon$.

Фундаментальная система решений (ФСР) линейного однородного ОДУ

Рассмотрим $p=1$.

Если ряд $(*)$ сходится $\Rightarrow \lim a_n = 0$

Пример: гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (необходимо условие выполнено: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

Покажем, что ряд расходится. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{2}, \forall N: n=p=N$

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow \text{выполнено отрицание условия Коши.}$$

3. Ряды с неотрицательными членами и признаки сравнения.
Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ $(**)$, $p_n \geq 0, \forall n$.

$\{S_n\}$ - монотонно возрастающая посл-ть.

Ряд $(**)$ сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть $\{S_n\}$ ограничена. !:)

I признак сравнения

$0 \leq p_n \leq q_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ с.с.с.с. Тогда ряд $(**)$ с.с.с.с.

Если ряд $(**)$ расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ так же расходится.

Д-во: $S_n^p = \sum_{k=1}^n p_k, S_n^q = \sum_{k=1}^n q_k \Rightarrow 0 \leq S_n^p \leq S_n^q$.

Если $\{S_n^q\}$ ограничена $\Rightarrow \{S_n^p\}$ ограничена, а если $\{S_n^p\}$ неограничена $\Rightarrow \{S_n^q\}$ неограничена.

Замечание: Признак сравнения в силе, если мер-во $0 \leq p_n \leq q_n$ верно начиная с некоторого номера n_0 .

II признак сравнения

$q_n > 0 \forall n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = L \neq 0$. Тогда ряды $(**)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ с.с.с.с. или расходятся одновременно.

Д-во: $L > 0 \exists n_0: \frac{1}{2} \leq \frac{p_n}{q_n} \leq L+1 \Rightarrow p_n \leq (L+1)q_n \Rightarrow$ если ряд $(***)$ с.с.с.с., то и ряд $(**)$ с.с.с.с.

$q_n \leq \frac{2}{L} p_n \Rightarrow$ если ряд $(**)$ с.с.с.с., то и ряд $(***)$ с.с.с.с.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ тоже расходится.

III признак сравнения

$p_n, q_n > 0, n \in \mathbb{N}$. Если $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{q_{n+1}}{q_n}, n \geq n_0$ (и.е. $\exists n_0$).

Тогда $(*)_p$ с.с.с.с. $\Rightarrow (*)_q$ с.с.с.с., $(*)_p$ расх. $\Rightarrow (*)_q$ расх.

Д-во: $\exists n > n_0$

$$\frac{p_{n_0+1}}{p_{n_0}} \leq \frac{q_{n_0+1}}{q_{n_0}}$$

$$\frac{p_{n_0+2}}{p_{n_0+1}} \leq \frac{q_{n_0+2}}{q_{n_0+1}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

$$\frac{p_{n_0+1}}{p_{n_0}} \cdot \frac{p_{n_0+2}}{p_{n_0+1}} \cdot \dots \cdot \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{q_{n_0+1}}{q_{n_0}} \cdot \frac{q_{n_0+2}}{q_{n_0+1}} \cdot \dots \cdot \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_{n_0}} \leq \frac{q_{n+1}}{q_{n_0}}$$

$$p_{n+1} \leq \left(\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} \right) q_{n+1}$$

$\Rightarrow$ по 1-му пр. сравнения с.с.с.с. $(*)_p$ с.с.с.с. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} q_n$ с.с.с.с. $\Rightarrow (*)_q$ с.с.с.с.

А если $(*)_p$ расх. $\Rightarrow (*)_q$ расх.

4 Признаки Даламбера и Коши, их сравнения

Признак Даламбера $\exists p_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ и $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq q < 1$ при $n \geq n_0$ (соответственно $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1$). Тогда $(*)_p$ с.с.с.с. (соотв. расходится)

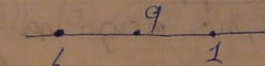
Д-во: $q_n = q^{n-1} \Rightarrow \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq q = \frac{q_{n+1}}{q_n}, n \geq n_0$.

Т.к. $(*)_q$ с.с.с.с., по $(*)_p$ с.с.с.с. (соотв. $p_{n+1} \geq p_n \Rightarrow p_n \neq 0$) $(*)_p$ расходится

Признак Даламбера (близкой к 1)

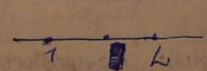
$p_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L$, то при $L < 1$ $(*)_p$ с.с.с.с., а если $L > 1$ $(*)_p$ расх.

Д-во: 1. $L < 1$

$\exists q \in (L, 1)$ 

$\exists n_0: \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq q, n \geq n_0 \Rightarrow (*)_p$ с.с.с.с. по признаку Даламбера.

2. $L > 1$

 $\exists n_0: \frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1, n \geq n_0 \Rightarrow (*)_p$ расх. по пр. Даламбера

Замечание 1. Если $k=1$, то может быть как сходимость, так и расходимость.

Например: $p_n = \frac{1}{n}$ $(*)_p$ расх. $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$.

Рассмотрим еще ряд: $p_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$, ряд сходится.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1$

Замечание 2 Если $L > 1 \Rightarrow$ нарушено одно из условий сходимости (т.е. этот признак ничего не дает по сравнению с предыдущим).

Замечание 3 Признак Даламбера применим только к монот. (последовательностям) ТВР: ряд $\{p_n\}$.
 Его удобно применять, когда есть рекуррентное отношение (например, если есть факториалы...)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ ряд сходится

6.09.08

Лекция 2

Признак Коши $(*)_p$ $\sum p_n, p_n \geq 0$

Если $\exists q \in (0, 1) \quad \forall p_n \leq q, n \geq n_0$, то $(*)_p$ сходится

Если $\sqrt[n]{p_n} \geq 1, n \geq n_0$, то $(*)_p$ расх.

Д-во.

$$q = q \sum_{n=1}^{\infty}$$

Наше доказательство:

$$\sqrt[n]{p_n} \leq q < 1$$

$$p_n \leq q^n < 1 \quad \text{Брег (лимит не брег)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \text{сумма исп. прогрессии}$$

$$\frac{1}{1-q} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится}$$

$\sqrt[n]{p_n} \geq 1, p_n \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$
 - нарушено одно из условий

Признак Коши в предельной форме

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = L$, то тогда при $L > 1$ $(*)_p$ расходится
 $L < 1$ $(*)_p$ сходится

$$1. L < 1 \Rightarrow \exists q \in (L, 1) \quad L < q < 1$$

По оп. $\lim \exists n_0$:

$$\sqrt[n]{p_n} \leq q, n \geq n_0 \Rightarrow \text{ряд } (*)_p \text{ сходится по предыдущ. улв.}$$

2. $L > 1 \Rightarrow$

по оп. предела, L находится с по $\sqrt[n]{p_n} \geq 1 \Rightarrow n \geq n_0 \quad p_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $(*)_p$ расходится.

Замечание 1. $L > 1$ - не обязательно необходима условие $p_n \rightarrow 0$ и т.д. и т.п.

Замечание 2 $L = 1$ начало нового признака не дает. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ сходится, однако } \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n+1}} \rightarrow 1$$

Покажем что признак Коши сильнее признака Даламбера.
 (если ряд s_n по Коши $\Rightarrow$ ряд s_n по Дав. Обратное неверно)

Сравнение признаков Коши и Даламбера.

1. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = L$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L$, т.е. из сходимости ряда по Коши $\Rightarrow$ с-ть ряда по Даламберу.

2. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = L$

$$1. p_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ - нечетно, т.е. } n=2k-1 \\ \frac{n}{2^n}, & \text{если } n \text{ - четно, т.е. } n=2k \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \sqrt[n]{p_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{p_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ ряд s_n по пр. Коши

$$\sqrt[n]{p_n} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{p_{2k+2}}{p_{2k+1}} = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+1}} \cdot 2^{2k+1} = k+1 \rightarrow \infty$$

$$\frac{p_{2k+1}}{p_{2k}} = \frac{1 \cdot 2^{2k}}{2^{2k+1} \cdot 2^k} = \frac{1}{4^k} \rightarrow 0$$

Д-во 2-го улв-я - на основании леммы.

Лемма 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, a_n - последовательность. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon, n \geq N(\varepsilon)$

$$\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \right| \leq \left| \frac{a_1 - a + \dots + a_N - a}{n} \right| + \left| \frac{a_{N+1} - a + \dots + a_n - a}{n} \right|$$

$$J_1 \leq \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_N - a|}{n} < \frac{\varepsilon(N-N)}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$J_2 = \frac{|a_{N+1} - a| + \dots + |a_n - a|}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \Rightarrow J_2 < \varepsilon \text{ для достаточно больших } n.$$

т.о. $\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a \right| \leq 2\varepsilon$ для дост. больших n

Замечание

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = +\infty$$

$$(\text{ср.б.} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = -\infty)$$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): a_n \geq \varepsilon, n \geq N$

$$n \geq 2N \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \dots + a_n}{n}$$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{4\varepsilon(N-N)}{n} \geq 4\varepsilon(1 - \frac{N}{n}) \geq 4\varepsilon(1 - \frac{1}{2}) = 2\varepsilon$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{N}{n}$$

$$n \geq 2N$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

$$n \geq \max(2N, N_2)$$

Лемма 2 (о среднем непрерывном)

$$a_n > 0 \forall n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \text{ Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} = a$$

Д-во: Если $a \neq 0$, то тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \dots + \ln a_n}{n} = \ln a$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \rightarrow a$$

2) Если $a = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \dots + \ln a_n}{n} = -\infty$$

$$\ln(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}) \Rightarrow \ln \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \rightarrow 0$$

Лемма 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_1 \cdot \dots \cdot p_n} = L$$

Положим $p_0 = 1$

$$q_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \Rightarrow L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q_1 \cdot \dots \cdot q_n} = L \Rightarrow \sqrt[n]{p_n} \rightarrow L$$

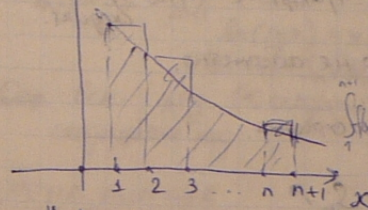
$$\text{Но } q_1 \cdot \dots \cdot q_n = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = p_n$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ конечн.

Критерий Коши (для последовательности)

$\exists \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall p \geq n \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^p f(k) \right| < \varepsilon$ Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится / расходится

Д-во: y



$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \quad (1)$$

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \sum_{k=1}^n f(k) \text{ с.б.} \Rightarrow \{S_n\} \text{ ограничена} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ сходится}$$

$$\text{Обратно: } \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty, \text{ то } (2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ ограничена $\Rightarrow$ ряд сходится

Пример 1 (обобщенная гармоническая прогрессия)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad S \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^s} \rightarrow 0 \text{ - ряд расходится}$$

$S > 0$: $\frac{1}{x^s}$ - непрерывна, невозвр. $\Rightarrow$ по интегр. признаку Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ сходится} \Leftrightarrow (s > 1)$$

Обратн: $S \leq 1$ - расх, $S > 1$ - сходит.

Пример 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ (одной стороны)

$$(1) \Rightarrow S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(x+1) \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})$$

$$(2) \Rightarrow S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n + 1 \Rightarrow S_n = \ln n + O(1) \text{ (какая-то ограниченность)}$$

можно n -то $S_n = \ln n + C_2 + o_n, o_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Ряд не и произв. значения абсолютн. с-ты

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ср. - ряд (с) может абсолютно с-ть, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

Теорема Если (с) с-ть абсолютно, то (с) сходится

Д-во. Восп-ся Критерий Коши. с-ты (*)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N, \forall p \geq n$$

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_{p+1}| < \varepsilon$$

Но $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow (*)$ по крит. Коши сходится.

Пример ряда, кон. с.с., но не абсолютно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \sum |a_n| \text{ расходится.}$$

$$S_{2n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = S_{2n} \nearrow$$

$$= 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - \dots - (\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}) - \frac{1}{2n} < 1 \Rightarrow S_{2n} \nearrow \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow S$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_n(x)$$

$$\ln 2 = S_n + R_n(1) \quad (x=1)$$

Опр. Если $(*)$ сходится, $(**)$ расходится, то $(*)$ - условно сходящийся.

Далее:
Теорема Римана
Теорема Коши.

11.09.08

Лекция 3

РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗНАКА

Абсолютная сходимость

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Опр. $(*)$ сходится абсолютно, если с.с. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ $(**)$

Теорема Ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд сходится

З-во: КК сход. $(**)$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$
Критерий Коши $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow (**)$

Example: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \sum |a_n| \text{ расходится}$

$$S_{2n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = S_{2n} \nearrow$$

$$= 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - \dots - (\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}) - \frac{1}{2n} < 1 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow S$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + R_n(x)$$

$$S_n(2) = S_n + R_n(1)$$

Опр. Если ряд $(*)$ сходится, $(**)$ расходится, то $(*)$ - условно сходящийся ряд.

ТЕОРЕМА РИМАНА

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно тогда $\forall L$ (включая $L = +\infty, L = -\infty$) можно так переставить члены ряда, что новый ряд будет сходиться к L .

Доказательство: $\square \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ расходится}$

$$P_n = \frac{1}{2} (|a_n| + a_n) = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \rightarrow \infty$$

$$Q_n = \frac{1}{2} (|a_n| - a_n) = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ |a_n|, & a_n < 0 \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow \infty$$

Положительных членов ряда бесконечно много ($\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \infty$), и отрицательных тоже ($\sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \infty$)

$\exists 0 \leq \alpha < \infty$ (можно считать, что все члены ряда ненулевые)

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}$ - стоящие в порядке возрастания индексов положит. члены ряда,
 $\beta_1, \dots, \beta_{n_2}$ - стоящие в порядке возрастания индексов отрицательных членов.

Здесь $n_1: \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1} < \alpha, \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1+1} > \alpha$ (если $\alpha_1 > \alpha \Rightarrow n_1 = 1$)

$n_2: \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1} - \beta_1 - \dots - \beta_{n_2} > \alpha, \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1} - \beta_1 - \dots - \beta_{n_2+1} < \alpha$

Новый ряд имеет вид: $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1} - \beta_1 - \dots - \beta_{n_2} + \alpha_{n_1+1} + \dots$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_1} > L \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_1} - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n_2} > L$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_1} - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n_2} - \beta_{n_2+1} < L$$

$$\begin{matrix} E \\ | \\ \frac{L}{1} \\ | \\ 1 \\ | \\ P_{n_2} \end{matrix}$$

S'_j - j-й частичная сумма ряда. При $j > n_1$, $|\dots| - \ell \leq 1$ не превосходит модуль последнего элемента последней завершённой группы. Т.е., если $j \geq n_1$, $N < n_2$, то $|S'_j - \ell| \leq \alpha_{n_1}$.
 $n_2 + n_1 < n_3 + n_2$, $|S'_j - \ell| \leq \beta_{n_2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n_1} \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty \\ \beta_{n_2} \rightarrow 0 \end{array} \right.$
 На ℓ шаге добавляется новый элемент первоначального ряда.
 $\Rightarrow$ новый ряд содержит все члены исходного ряда.
 Т.к. первоначальный ряд сходится $(\sum a_k)$, то $\alpha_i \rightarrow 0$ (необходимо условие) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha_j \rightarrow 0, \beta_j \rightarrow 0 \Rightarrow$ все модули $+\alpha_i, -\beta_i$ членов $\Rightarrow 0 \Rightarrow$ новый ряд сходится к ℓ .

Рассмотрим случай $\ell = +\infty$

Берем n_1 : $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1} \geq 1$. Затем выбираем n_2 (разумно, $\Rightarrow$ это можно сделать)

$$n_2: \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1} - \beta_1 - \beta_{n_2} + \dots + \alpha_{n_2} > 2$$

$$n_3: \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_2} - \beta_2 + \alpha_{n_3} + \dots + \alpha_{n_3} > 3$$

$\Rightarrow$ новый ряд содержит все члены исходного ряда $\Rightarrow$ новый ряд расходится

$\beta \rightarrow 0 \Rightarrow$ новый ряд с. к. ∞ (т.к. промежуток $\sum = 1 - \beta_n$)

Если $\ell < 0$, $\ell \leq -\infty$ аналогично, начинаем n_2 с отрицательных членов, либо рассматривать ряд $+\sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_n)$. Представить себе можно так, чтобы новый ряд сходился к ℓ . (во-вторых)

Теорема Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ - ряд, полученный из (*) перестановкой членов $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ сходится абсолютно и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$.

Док-во.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_i, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \left| \sum_{j=1}^n a_j - S \right| < \varepsilon/2; \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \varepsilon/2 \quad (\exists N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \varepsilon/2 \right.)$$

Метрика Коши

Рассмотрим новый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$: $\exists N_1$: среди $a'_1, \dots, a'_N$ содержится все $a_1, \dots, a_N$.

$$\forall n \geq N_1 \left| \sum_{j=1}^n a'_j - S \right| = \left| \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=N+1}^n a_k - S \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{k=1}^N a_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n a_k - S \right|$$

Второе слагаемое:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - S \right| < \varepsilon/2$$

Первое слагаемое:

$$\left| \sum_{j=1}^n a'_j - \sum_{k=1}^N a_k \right| = |a'_1 + \dots + a'_{n-N} + \sum_{j=1}^N a_j - \sum_{k=1}^N a_k|$$

$$\leq |a'_1| + \dots + |a'_{n-N}| \leq \sum_{j=N+1}^n |a_j| \leq \varepsilon/2 \quad \text{так как } \left| \sum_{k=1}^N a_k - S \right| < \varepsilon$$

Это док-во

абсолютной сходимости зависит от a_k на $|a_k|$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ сходится } (\Leftrightarrow A) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a'_k| \text{ сходится } (\Leftrightarrow A)$$

// перестановка сохраняет сходимость или для абсолютно сходящихся рядов

Последовательности с ограниченным изменением и их свойства

Опр. Последовательность $\{u_n\}$ называется с огранич. изменением, если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n+1}|$ сходится

Теорема $\{u_n\}$ монотонная и ограничена $\Rightarrow \{u_n\}$ послед-ть с огранич. изменением.

Лемма $\exists v = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ $\exists u_n$ неубывающая. Тогда $\sum_{k=1}^n |u_k - u_{k+1}| =$ неуб.

$$= \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + \dots + u_n - u_{n+1} = u_1 - u_{n+1} \rightarrow u_1 - v \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \{u_n\} \text{ - послед-ть с о.р.}$$

Зам. Сумма 2-х послед-ть с огранич. изменением является также с огранич. изменением.

$$|a_k + b_k - a_{k+1} - b_{k+1}| \leq |a_k - a_{k+1}| + |b_k - b_{k+1}|$$

$\Rightarrow$ если по-от. с.р. послед-ть с о.р. $\Rightarrow$ по-от. с.р. $\Rightarrow$ по-от. с.р.

Упр. Если $\{u_n\}$ послед-ть с огранич. изменением $\Rightarrow \{u_n\}$ сходящаяся

Док-во. Критерий Коши с.р. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n+1}|$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |u_n - u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p} - u_{n+p+1}| < \varepsilon$$

$$\text{Но } |u_n - u_{n+p}| = |u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - \dots - u_{n+p} + u_{n+p} - u_{n+p+1}| \leq |u_n - u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p} - u_{n+p+1}| < \varepsilon$$

Н.О. Не всякая сходящаяся последовательность имеет ограниченное изменение.

Пример: $v_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ НО: $|v_n - v_{n+1}| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{2}{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n+1}|$ раск. ит.

Задача к задаче 1:

П-но, что посл-ть является п-но-то с ограниченным изменением $\Leftrightarrow$ ее можно представить в виде разности 2-х монотонных посл-тей.

Рассе - признаки с-ти числ. рядов.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$

Преобразование

$\{v_k\} \quad u_k = v_k - v_{k+1}, \quad k \geq n+1$

$u_k = \sum_{j=k}^n u_j; \quad v_k = \sum_{j=k}^n u_j$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (v_k - v_{k+1}) v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k v_{k+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} v_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} v_k (v_k - v_{k+1}) + v_{n+p} v_{n+p} - v_n v_{n+1} \\ \sum u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} v_k (v_k - v_{k+1}) + v_{n+p} v_{n+p} - v_n v_{n+1} \end{aligned}$$

13.09.08

Лекция 4

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ преобразование Абеля

Первый признак Абеля

$\{S_n\}$ ограничена ($S_n = \sum_{k=1}^n u_k$), $\{v_n\}$ посл-ть с огранич. изменением, сходящаяся к 0.

Тогда (*) сходится.

Д-во: $\exists M: |S_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}; \forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n \geq N_1, \forall k \in \mathbb{N} \sum_{k=n}^{n+p} |v_k - v_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3M}$ (условие посл-ти с огранич. изменением)

$\exists N_2: |v_n| < \frac{\varepsilon}{3M} \forall n \geq N_2; N = \max(N_1, N_2), \bar{v}_n = S_n, \bar{v}_0 = 0$

Запишем преобр. Абеля

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k| |v_k - v_{k+1}| + |S_{n+p}| |v_{n+p}| + |S_n| |v_n| \leq M \left(\frac{\varepsilon}{3M} \right) + M \left(\frac{\varepsilon}{3M} \right) + M \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \Rightarrow \text{ряд } (*) \text{ сход. по критерию Коши}$$

Второй признак Абеля

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, $\{v_n\}$ посл-ть с огранич. изменением. Тогда ряд (*) сходится.

Д-во: $\{v_n\}$ сходится, т.е. является посл-тью с огранич. изменением. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k$

Рассмотрим посл-то $u'_n = v_n - v_{n+1}$ это будет тоже посл-ть с огранич. изменением, т.е. $|u'_n - u'_{n+1}| = |v_n - v_{n+1}| \Rightarrow v'_n \rightarrow 0$

Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по S_n огранич. $\Rightarrow$ в совокупности $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v'_n$ сходящаяся по 1-му пр. Абеля

Задача к задаче 1

$\{v_n\}$ посл-ть, такая, что для любого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ сходится. Это, что $\{v_n\}$ посл-ть с огранич. изменением.

второй признак Абеля: посл-ть является посл-тью с огранич. изменением. (негатив) Признак Дирихле-Абеля

Для того, чтобы ряд (*) сходился, достаточно выполнения одного из двух условий:

(1) $\{S_n\}$ ограничена ($S_n = \sum_{k=1}^n u_k$) (2) $\{v_n\}$ монотонна и ограничена

Д-во: (1) $\Rightarrow$ (*) с-ся по 1-му пр. Абеля; (2) $\Rightarrow$ (*) с-ся по 2-му признаку Абеля.

(негатив)

Пр. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$, p_n - неубывает, с-ся к 0 посл-то, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$ - ряд Лейбница

Уб.

Признак Лейбница: ряд Лейбница сходится.

Д-во: $u_n = (-1)^{n-1}$, $v_n = p_n$, $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}$, n нечетно, $S_n = 1$, n четно, $S_n = 0$. Проверено (1) по условию пр. Дирихле-Абеля $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ сходится, т.е.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ с-ся по признаку Лейбница при $p > 0$. Если $p \leq 0 \Rightarrow$ ряд расх. (очч. ясно $\neq 0$)

// Если 1-й ряд потонил наш записке "рядов"

Пример, рядов: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Преобразование

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$

$x \neq 2\pi k \quad \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{5x}{2} - \dots + \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \cos \left(n + \frac{3}{2}\right)x \right)$

$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x \right)$

$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right)x \right)$

$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(-\sin \frac{x}{2} + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x \right)$

$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

$\sum_{k=1}^n \sin kx, \quad \sum_{k=1}^n \cos kx, \quad |S_n^{(1)}| \leq \frac{2}{2 |\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad |S_n^{(2)}| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$

① $x \neq 2\pi k \Rightarrow \text{при } p > 0 \{S_n^{(p)}\}$ огранич., $\frac{1}{np} \searrow, \frac{1}{np} \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{np}$ сходится
(т.к. выполнена 1-я пара условий в пр. Дирхле-Жюли)
 $\{S_n^{(2p)}\}$ огранич., $\frac{1}{np} \searrow, \frac{1}{np} \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{np}$ сходится

② $p \leq 0 \{S_n^{(p)}\} \cdot n^p \not\rightarrow 0, \sin nx \cdot n^p \not\rightarrow 0 \Rightarrow \text{оба ряда расходятся при } p \leq 0$

③ $x = 2\pi k \Rightarrow \sin nx = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{np}$ сходится $\forall p$, $\cos nx = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{np} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np}$ с.к. при $p > 1$.

Замечание Для условий с-и рядов достаточно применить сравнение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \text{ с.к.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^p} + \frac{1}{n^p} \right) \text{ расх.}$$

Но b_n не сходится!

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty \Rightarrow \text{с.к. по Лейбницу}$$

Замечание В признаке Лейбница монотонность сукцессивна.

$$p_n \sum_{n=1}^{\infty} p_n \alpha. \quad (p_n = \frac{1}{n})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n+1} \text{ расх.} \quad (p_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p_n \text{ расх., хотя } p_n > 0, p_n \rightarrow 0$$

Перемножение рядов

$$(\ast_a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (\ast_b) \quad \begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{matrix} \quad (1)$$

$$(\ast_c) \quad a_n b_1 + a_n b_2 + \dots + a_n b_n$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, содержащий элементы (1), записанные в некотором порядке.

Теорема $\sum (\ast_a), (\ast_b)$ сходятся абсолютно к суммам S_a, S_b соответственно.

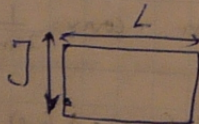
Тогда $(\ast_c)$ сходятся абсолютно, причем $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = S_a \cdot S_b$

Д-во 1. Покажем, что $(\ast_c)$ сходятся абсолютно.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{j_k}| + |b_{l_k}| \quad J = \max(j_1, \dots, j_n), L = \max(l_1, \dots, l_n)$$

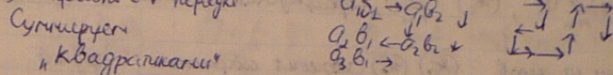
Тогда $\{a_{j_k} \cdot b_{l_k}\}$ содержится в прямоугольнике

$$\sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L |a_j| \cdot |b_l| = \sum_{j=1}^J |a_j| \cdot \sum_{l=1}^L |b_l| \leq \left(\sum_{j=1}^J |a_j| \right) \left(\sum_{l=1}^L |b_l| \right)$$



Таким образом, част. суммы $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ огранич. в совокупности $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ сходится абсолютно.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} C_k = S_a \cdot S_b$. Т.к. ряд $(\ast_c)$ сходятся абсолютно, то с.о. (по т. Ринана) можно суммировать в+ порядке.



Суммируем в+ порядке "квадратиками". Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} C_k = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_l = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l \right)$. Т.к. абсолютн. ряд с.к. с.о. то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^2 = S_a \cdot S_b$ (применяя подполн-ть).

Суммирование по Коши

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j x^{j-1} \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_i b_j x^{i+j-2} = \sum_{k=1}^{n+m+2} C_k x^{k-1}$$

$$\begin{cases} b_k = 0, k > n+1 \\ a_k = 0, k > n+1 \end{cases} \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = C_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k$$

$$C_1 = a_1 b_1$$

$$C_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$\begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{matrix}$$

$$C_k = a_1 b_k + \dots + a_k b_1$$

$\sum C_k$ - произведение по Коши рядов $\sum a_k, \sum b_k$

Теорема Мертенса Если один из $(\ast_a), (\ast_b)$ сходятся абсолютно, а второй, просто сходятся (хотя бы условно), то их пре по Коши с.к. к $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$

Замечание Условие абсолютной с-и можно отбросить

многие. Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ - сходятся условно. Перемножим на себе данный ряд

$$a_k = b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}; \quad a_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_{n+1-j} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot b_{n+1-j} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \cdot \frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n+1-j}} = (-1)^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j} \sqrt{n+1-j}} \right)$$

$$\alpha \beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{j} \sqrt{n+1-j}} \geq \frac{2}{(\sqrt{j} + \sqrt{n+1-j})^2} = \frac{2}{(n+1-j)} \Rightarrow$$

$|C_n| = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j} \sqrt{n+1-j}} \geq \sum_{j=1}^n \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n$ расходящийся. Т.е. просто сходимости абсолютно не enough.
Лемма и теорема Покажем, что если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b, \sum_{n=1}^{\infty} C_n = S_c$ и $S_a \cdot S_b = S_c$ то ряд с.к. (Если оба ряда с.к. (хотя бы условно) и их пре по Коши)

Лекция 5

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (**) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, (*) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — произведения по Коши

Теорема

Мертенса. Если один из рядов (*) (**) сходится абсолютно, а другой просто с.с.с. (хотя бы условно), то их произведение по Коши сходится к

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$$

До-во: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.с.с. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \rightarrow S_b$

$$c_1 = a_1 \cdot b_1$$

$$c_2 = a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1$$

$$S_n^c = \sum_{k=1}^n c_k = a_1(b_1 + \dots + b_n) + a_2(b_1 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_{n-1}(b_1 + b_2) + a_n b_1$$

$$c_n = a_1 b_n + \dots + a_n b_1$$

$$\sum_{j=1}^k b_j = S_b + \beta_k, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$$

$$\ominus a_1(S_b + \beta_n) + a_2(S_b + \beta_{n-1}) + \dots + a_n(\beta_1 + S_b) =$$

$$= (a_1 + \dots + a_n) S_b + a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_1$$

$$\downarrow S_a S_b, n \rightarrow \infty$$

Достаточно n-го члена

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_1) = 0$$

{a_n} ограничена, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (из с.с.с. по лемме)
{β_n} ограничена $\sum a_n \leq \sum b_n$

$$\exists c: |a_n| \leq c, |\beta_j| \leq c, \forall n, j \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходится} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0: \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2c}$$

$$n > N \quad \underbrace{a_1 \beta_n + \dots + a_n \beta_1}_{J_1} + \underbrace{a_{n+1} \beta_{n-N} + \dots + a_n \beta_1}_{J_2}$$

$$|J_2| \leq |a_{n+1}| \cdot c + \dots + |a_n| \cdot c = (|a_{n+1}| + \dots + |a_n|) \cdot c < \frac{\varepsilon}{2}$$

в J_1 входит N (конечное) слагаемых.

$$|J_1| \leq |c| (|\beta_n| + \dots + |\beta_{n-N+1}|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n \geq N_2$ (можно так подобрать, что $\beta_n \rightarrow 0$)

Окончат. $|J_1 + J_2| \leq |J_1| + |J_2| \leq \varepsilon \Rightarrow$ Теор. доказана.

Бесконечное произведение

$$\{p_n\} \quad (*) \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ бесконечн. произв.}$$

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k$$

Опр. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \neq 0$, то (*) называется сходящимся к P, если $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$

если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$, то (*) наз. расходящимся, или расходящимся к 0

Пример 1

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

расходится к нулю.

Пример 2 $p_1 < p_2 < \dots < \dots$ посл. то всех идущих подряд простых чисел.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad x > 1$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} = 1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{p^{2x}} + \dots$$

$$(1 + \frac{1}{p^x})^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p^x}}$$

$$\prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^x}} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1 x}} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{k_2 x}} \cdot \dots \cdot \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{k_n x}} =$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{1}{(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n})^x} =$$

$$= \sum \frac{1}{m^x} \quad \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^x} \leq P_n \leq \sum \frac{1}{j^x}$$

m: все прот. $\prod_{j=1}^n p_j$
всех чисел m содержащих
факт. $p_1, \dots, p_n$

Т.к. $p_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$

$$P_n \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^x}$$

Если $p_n = 0$ для некоторого n, то $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0$. Поэтому считаем, что $p_n \neq 0$
Тогда отображения конечного числа членов бесконечного пр-я не влияют на сходимость.

Необходимое условие с.с.с. в произведении.

(*) сходится. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$

До-во

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$$

Необходимое условие не является достаточным

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = 0, \text{ хотя } \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

Далее считаем, что $p_n > 0 \forall n$

Критерий сходимости бесконечного произведения

Пр-е (*) сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ (**). При этом если $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = S, \text{ то } P = e^S$$

20к-60:

$$P_k = \prod_{n=1}^k p_n, S_n = \sum_{k=1}^n \ln p_k, \boxed{\ln P_k = S_k} \text{ Если } P_n \rightarrow P \neq 0 \Rightarrow \ln P_n \rightarrow \ln P \Rightarrow S_n \rightarrow \ln P$$

$$\text{Если } S_n \rightarrow S, \text{ то } P_n = e^{S_n} \rightarrow e^S \neq 0$$

$$\ln P = \sum \ln p_n$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ [дальше } p_n = 1 + u_n] \quad \left(\begin{array}{c} (*) \sum p_n \\ (**) \sum \ln p_n \end{array} \right)$$

Тогда 1. Если $\exists n_0: p_n \geq 1, n \geq n_0$, то $(*)$ расходится $\Leftrightarrow (**) \sum \ln p_n$ расходится

20к-60: $n \geq n_0 \ln(1+u_n) \geq 0, u_n \geq 0 \Rightarrow (**) \text{ и } (***)$ - ряд с неотриц. членами при $n \geq n_0$.

$$p_n \rightarrow 1 \Rightarrow u_n \rightarrow 0 \text{ Дальше } u_n \rightarrow 0 \text{ (иначе } (**) \text{ и } (***) \text{ расходится)}$$

$$\frac{x}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad 0 < x < \varepsilon, \text{ то } \exists N: \frac{u_n}{2} \leq \ln(1+u_n) \leq u_n, n \geq N$$

по 1-му признаку сравнения $(*)$ сходится $\Leftrightarrow (**) \sum \ln p_n$ сходится

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Тогда 2. Если $\sum u_n$ сходится, то $(*) \sum p_n$ сходится, а если $\sum u_n$ расходится, то $(*) \sum p_n$ расходится

из $\sum u_n$ расходится, то $(*) \sum p_n$ расходится

$$(*) \prod p_n, u_n = p_n - 1$$

$$\text{Доказ-во: } u_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \geq 0$$

$$\frac{x^2}{2} \leq x - \ln(1+x) \leq x^2, |x| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) u_n < \varepsilon$$

$$\text{Т.к. } u_n \rightarrow 0 \quad \exists N: \frac{u_n}{2} \leq u_n - \ln(1+u_n) \leq u_n^2, n \geq N$$

по 1-му признаку сравнения $\sum (u_n - \ln(1+u_n))$ сходится $\Leftrightarrow \sum u_n^2$ сходится

$$\text{Т.о. если } \sum u_n, \sum u_n^2 \text{ сходится, то } (*) \sum p_n \text{ сходится}$$

Если 1-й из рядов сходится, а другой расходится, то $\Rightarrow$

$(*) \sum p_n$ расходится

Пример: $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{\sin n}{n})$ $u_n = \frac{\sin n}{n}, \sum u_n$ сходится (логарифм Дирихле)

$$u_n^2 = \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{n} - \frac{\cos 2n}{2n} \text{ - расходится} \Rightarrow \prod p_n \text{ расходится}$$

Двойные и повторные ряды

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

$$\text{Ср. Если } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = A$$

$$\text{и } \sum_{m=1}^{\infty} A_m = A \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A$$

повторн. ряд по строкам.

$$\text{Если } \forall n \in \mathbb{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \beta_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = B$$

необходимое условие по теореме.

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

Определение. Если $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = S$ (м.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0, N(\varepsilon) > 0 \forall n \geq M(\varepsilon) \forall m \geq N(\varepsilon) |S_{mn} - S| < \varepsilon$), то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S$$

двойной ряд

Пример

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$A_m = 0 \quad \forall m \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 0$$

$$B_n = 1, B_m = 0, n > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = 1$$

$$S_{mm} = 1, S_{mm+1} = 0 \Rightarrow \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \text{ расходится}$$

Лекция 6

20.09.08

$$a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} \ \dots$$

Обобщенно множественно

$$a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} \ \dots$$

$$\text{Если } \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S_A, \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} = S_B,$$

$$a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nn} \ \dots$$

$$\text{то } \sum_{m,n=1}^{\infty} (\lambda a_{mn} + \mu b_{mn}) = \lambda S_A + \mu S_B$$

(обобщенно исчисл. свойства - для повторн. рядов и постр.-мат.)

Выразим элемент n-го ряда через суммы

$$S_{mn} - S_{m-1,n} = a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{mn}$$

$$S_{m,n} - S_{m-1,n-1} = a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{m-1,n} + a_{m,n-1} \Rightarrow S_{mn} - S_{m-1,n} - S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1} = a_{mn} \quad (*)$$

Необходимое условие $\Leftrightarrow$ теор. двойного ряда

$$\text{Если } \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \text{ сходится, то } \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0$$

$$\text{Д-во: } \lim_{n,m \rightarrow \infty} S_{mn} = S \Rightarrow \lim_{n,m \rightarrow \infty} a_{mn} = S - S + S - S = 0$$

$$S_{mn} = a_{11} + \dots + a_{1n} + a_{21} + \dots + a_{2n} + \dots + a_{m1} + \dots + a_{mn}$$

$$S_{m-1,n} = a_{11} + \dots + a_{1n} + a_{21} + \dots + a_{m-1,n}$$

Пример 00123 ... n
 001-2-3 ... -n
 1-1
 2-2
 3-3

$$s_{mn} = 0 \Rightarrow m, n \geq 2$$

$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ с.к., но $\{a_{mn}\}$ неограничен

Теорема 1 Если двойной ряд сходится и сходится в строках по строкам (соотв. по столбцам), то $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ (соотв. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$).

Доказ-во. $\forall i \exists \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = A_i$ — с.к. в строках (для ряда по строкам)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon), N(\varepsilon): \forall m \geq M(\varepsilon), \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} - S \right| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \rightarrow \sum_{i=1}^m A_i$$

т.е. $B(i)$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^m A_i - S \right| < \varepsilon \quad \forall m \geq M(\varepsilon)$
 это значит, что $\sum_{i=1}^m A_i = S$, т.е. $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S$

Двойные ряды с неотрицат. членами

Теорема 2 (Критерий с.к. дв. ряда с неотрицат. членами)

Пусть $a_{mn} \geq 0, m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ с.к. $\Leftrightarrow \{S_{mn}\}$ ограничена.

Доказ-во. $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S \Leftrightarrow \exists M, N: \forall m \geq M, \forall n \geq N \quad S_{mn} \leq S + 1$

$$m \leq M, n \geq N$$

$S_{mn} \leq S_{MN}$ (и тогда, что с.к. $\Rightarrow$ ряд ≥ 0)

$$m \geq M, n \leq N$$

$$S_{mn} \leq S_{MN} \leq S + 1$$

$$m \leq M, n \leq N$$

$$S_{mn} \leq S_{MN} \leq S + 1$$

$\Leftrightarrow \{S_{mn}\}$ огранич. $S = \sup_{m,n} S_{mn} (=) \begin{cases} 1) S_{mn} \leq S \quad \forall m, n \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon), N(\varepsilon): S_{MN} > S - \varepsilon \end{cases}$

(определение точной верхней грани)
 $\forall m \geq M(\varepsilon), \forall n \geq N(\varepsilon) \quad S \geq S_{mn} \geq S_{MN} > S - \varepsilon$

$$\Rightarrow S_{MN} - S \leq 0$$

$$S_{MN} > -\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{M, N \rightarrow \infty} |S_{MN} - S| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{M, N \rightarrow \infty} S_{MN} = S \quad \forall \varepsilon$$

$\Rightarrow$ для дв. рядов $\exists$ признак сравнения

Теорема 3 (признак сравнения) $\exists 0 \leq a_{mn} \leq b_{mn}, m, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \text{ сходится,}$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \text{ расходится} \Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} \text{ расходится}$$

Доказ-во (попробуйте устно)

$$\exists S_{mn}^a = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \Rightarrow 0 \leq S_{mn}^a \leq S_{mn}^b$$

$$S_{mn}^b = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}$$

Если множество $\{S_{mn}^b\}$ ограничено, то

и множество $\{S_{mn}^a\}$ ограничено

Если множество $\{S_{mn}^a\}$ неогр. $\Rightarrow$ множество $\{S_{mn}^b\}$ тоже неогр.

$\downarrow$
 Теор. 2

$\downarrow$
 1. 3 доказана

Абсолютная сходимость

Ср. $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ назыв. абсолюто. сходящимся, если $\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится

$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ — абсолюто. сходящимся, если $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ с.к.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ — абсолюто. с.к. если $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|$ с.к.

Теорема 4 Если $\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится $\Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится.

$$p_{mn} = \frac{|a_{mn}| + a_{mn}}{2}, \quad q_{mn} = \frac{|a_{mn}| - a_{mn}}{2}$$

$$0 \leq p_{mn} \leq |a_{mn}| \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn} \text{ и } \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn} \text{ сходятся по м. 3}$$

$$0 \leq q_{mn} \leq |a_{mn}| \quad \Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} (p_{mn} - q_{mn}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn} - \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn}$$

Теорема 5 Если $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится $\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится.
 (аналогично и для ряда по столбцам)

Доказ-во $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ с.к. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A_m$ с.к. и $|a_{mn}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \right) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} |A_m| = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{ с.к. абсолюто.} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{ просто сходится (как сходящийся ряд)}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right| \geq \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right|$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \text{ (как сходящийся ряд)}$$

Определение $\{a_n\}$ - посл-ия всех элементов $\{a_{ij}\}$, занумерованных некот. способом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, называется простым рядом

(2) $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$; (3) $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$

Лемма 6 Если один из (1), (2), (3), (4) сходится абсолютно, то и остальные ряды с-я абсолютно.

При этом суммы всех типов рядов равны.

До-во:

I. (абсолют. с-я) [Достаточно рассмотреть 1 из рядов (3), (4)].
Например ряд (3)

(1) с-я абсолютно $\Rightarrow$ (2) с-я абсолютно

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$\forall m, n \quad S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$\exists R(m, n) = R_{mn}$: все элементы a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, содержащиеся в элементе $|a_1|, \dots, |a_{R_{mn}}| \Rightarrow S_{mn} \leq S_{R_{mn}} \Rightarrow \{S_{mn}\}$ ограничена $\Rightarrow \{S_{mn}\}$ сходящаяся $\Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится.

(2) с-я абс. $\Rightarrow$ (1) с-я абс. $\forall R \sum_{k=1}^R |a_k| \exists m(R), n(R): a_1, \dots, a_R$ содр. среди $\{a_{ij}\}$ $1 \leq i \leq m(R)$, $1 \leq j \leq n(R) \Rightarrow \sum_{k=1}^R |a_k| \leq \sum_{i=1}^{m(R)} \sum_{j=1}^{n(R)} |a_{ij}|$ если $\{S_{mn}\}$ ограничена, то $\{S_R\}$ ограничена.

// Красивое $S_{m(R)+n(R)}$ ограничено

(2) с-я абс. $\Rightarrow$ (3) с-я абс.

$$\exists C: \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq C \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (\text{из абс. с-я (2)})$$

При $i=m$ $\sum_{j=1}^n |a_{mj}| \leq C \quad \forall n \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_{mj}| < \infty$ (т.к. $\sum$ имеет огранич.)

по т. 1, $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$ (дв-ряд и т.е. ряд по строкам с-я).

(3) с-я абс. $\Rightarrow$ (2) с-я абсолютно

$$\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|) \leq C \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq C \Rightarrow \forall n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq C \Rightarrow \{S_{mn}\} \text{ ограничена} \Rightarrow \text{дв-ряд сходится}$$

II (равносходимость) Покажите, что все 4 ряда сходятся к одной сумме (если с-я)

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S \quad \text{т.к.} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \text{ с-я (из его абс. с-я т.к.)}, \text{ то сход. в строках}$$

$$\text{по строкам} \Rightarrow \text{по т. 1} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S$$

Рассмотрим ряд (4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Т.к. (1) сходится абсолютно, то его можно суммировать ∇ способом.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \rightarrow & a_{12} \\ a_{21} & \leftarrow & a_{22} \end{array}$$

Суммируем "по квадратам".

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \rightarrow S$$

$$\text{Но (1) сходится} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Лекция 7

25.09.08

$\{f_n(x)\}$, $x \in X$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛ-ИИ И РЯДЫ

Опр. Если $x \in X \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, то $f(x)$ называется пределом функциональной посл-ии $\{f_n(x)\}$

$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x): \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ // Это определение сходимости.

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x) \quad x \in X$, то $S(x)$ - сумма ряда.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ с-я при $x > 1$

(т.е. пример) $\eta(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x)$, где $a_1, \dots, a_n$ - непр. на X (дифф, инт.)

и $\eta(x)$ - непр. (дифф, инт.)

$$\text{Пример: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Абсолютно с-я ряд из "хороших" (непр, дифф.) с-я к разрывн. ф-ции.

Понятие равномерной с-я

Опр. $\{f_n(x)\}$ с-я равномерно к $f(x)$ на X ($f_n(x) \Rightarrow f(x)$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) = \forall n \geq N, \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Замечание! Если $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, то $\{f_n(x)\}$ с-я к $f(x)$ в $\forall$ точке множества X

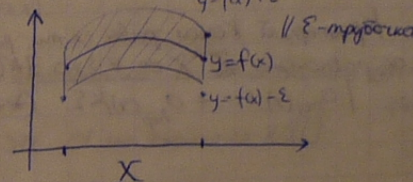
Обратное неверно (из с-я т.е. $\forall$ точке не $\Rightarrow$ равномерная с-я)

Пример (контр)

$$f_n(x) \xrightarrow{x} f(x)$$

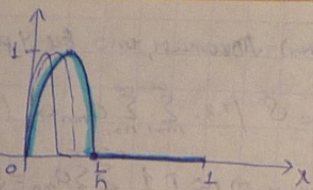
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in X$$

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$



Пример $f_n(x) = \begin{cases} \sin n\pi x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$

$X = [0, 1]$



$x=0 \quad f_n(0)=0 \rightarrow 0$
 $x>0 \quad \exists N(x): x > \frac{1}{N} \Rightarrow f_n(x)=0, n \geq N \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$

$f(x)=0$

$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$

$f_n(\frac{1}{2n}) = 1 \Rightarrow$ равномерн. сходимости нет, т.е.

$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall N \quad \exists n \geq N \quad \exists x = \frac{1}{2n} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Замечание 2

Если $f_n(x) \rightarrow f(x)$, то $\forall Y \subset X \quad f_n|_Y \rightarrow f|_Y$

Замечание 3

$\alpha_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$. Тогда $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ назыв. равномерно сходящимся к $S(x)$ на X , если $S_n(x) \rightarrow S(x)$ (здесь $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$).

Критерий Коши равномер. сходимости

$\{f_n(x)\}$ сходя. равн. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$
на множестве X

только от ε !

(*) $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$ (*)

Д-во: $\Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
т.к. $\forall p \in \mathbb{N}$

$p+n \geq N \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_{n+p}(x)| \leq$
 $\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$] выполнено условие Кр. Коши

$\forall x \in X$ от Кр. Коши сходимости послед. $\{f_n(x)\} \Rightarrow \forall x \in X$
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow$ (*) можно устроить $f_{n+p} \rightarrow f \Rightarrow$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N, \forall x \in X$

$|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \Rightarrow$ сходим. послед. $\{f_n(x)\}$ равномерно, т.е.

Критерий Коши равн. сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходя. равн. на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$
 $|a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$ (***)

Д-во

$S_n(x) - S_{n+p}(x) = |a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)|$ и применим критерий Коши к с-ти $\{S_n(x)\}$

Замечание 1 Отображение конечного числа членов ряда не влияет на равномерную сходимость.

Замечание 2 В (***) $p=1, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in X \quad |a_{n+1}(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ получим необходимые условия равномерной сходимости ряда:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X , то $a_n(x) \rightarrow 0$ на X

Признаки равномерной сходимости

Признак Вейерштрасса (сравнение со сходящимся чл. рядом)

$|a_n(x)| \leq u_n \quad \forall x \in X$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходя. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходя. равномерно на X .

Д-во: Исп-ем критерий Коши с-ти послед. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

НО: $|a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)| \leq |a_{n+1}(x)| + \dots + |a_{n+p}(x)| \leq u_{n+1} + \dots + u_{n+p} < \varepsilon$
 $\forall x \in X$ Следов., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равносх. по Кр. Коши.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сс. равномерно на $[1+\delta, +\infty)$: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2+\delta} = u_n, x \geq 1+\delta$,
ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\delta}$ сходя. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сс. равномерно на $[1+\delta, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса.

Задача дать, используя кр. Коши, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ не сс. равн. на $2 > 1$.

Замечание

Признак Вейерштрасса применим только к абсолютно сходящимся рядам (т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходясь)

Послед-е с равномерно ограниченным изменением

Опр. $\{v_n(x)\}$ послед-е последств. с равномерно огранич. изменением на X , если $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x) - v_{n+1}(x)|$ сс. равн. на X .

Утв. Если $\{v_n(x)\}$ послед-е с равномерно огранич. изменением на X , то $\{v_n(x)\}$ равномерно сходясь на X .

Д-во: $|v_n(x) - v_{n+p}(x)| \leq |v_n(x) - v_{n+1}(x)| + |v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)| + \dots + |v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)|$
и применим Кр. Коши (***)

Опр. $\{f_n(x)\}$ назыв. равномерно ограниченным на мн-ве X , если $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$
(потому что M не зависит от x !!)

Замечание. Если $\{v_n(x)\}$ - п.п.т. с равном. огранич. изменением (или равномерно сходящаяся п.п.т.) $\Rightarrow \{v_n(x)\}$ равном. огранич. изменением.

Пример

$$v_n(x) = \frac{1}{x}; \quad x \in (0,1) = X$$

$$v_n(x) - v_{n+1}(x) \equiv 0 \Rightarrow \{v_n(x)\} \text{ - п.п.т. с равном. огранич. изменением, но } \lim_{x \rightarrow 0+0} v_n(x) = \infty \Rightarrow \{v_n(x)\} \text{ не является равном. огранич.}$$

Признаки Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x); \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad x \in X$$

Первый признак Абеля

1) $\{S_n(x)\}$ равном. ограничена на X , $\{v_n(x)\}$ - п.п.т. с равном. огранич. изменением на X , $v_n(x) \rightarrow 0$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно на X .

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$$

$$u_k(x) = U_k(x) - U_{k-1}(x), \quad k \geq 1$$

Лекция 3

27.09.08

(ОЖАДЕСТВО АБЕЛЯ)

(ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ)

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x)) + U_{n+p+1}(x) v_{n+p+1}(x) - U_n(x) v_{n+1}(x)$$

Первый признак Абеля

1) частичн. Σ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равном. огранич. на множестве X , $\{v_n(x)\}$ - п.п.т. с равном. огранич. изменением по X равном. сход. к 0 на X . Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ равном. сход. на X .

Доказ. $\exists M: |S_n(x)| \leq M \quad \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$;

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (v_k(x) - v_{k+1}(x)) \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=n+1}^{n+p}} \right\} \text{ по условию}$$

$$\exists N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2(\varepsilon) \quad |v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$\begin{aligned} | \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) | &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + M |v_{n+p+1}(x)| - M |v_{n+1}(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно на множестве X по критерию Коши, т.е.

Второй признак Абеля

1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве X , $\{v_n(x)\}$ - п.п.т. с равном. огранич. изменением (т.е. сходится), $\{v_n(x)\}$ равном. ограничена на множестве X . Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно на множестве X .

Доказ.

$$\exists M: |v_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$$

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

($\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равном. сходится)

(если мы будем также $\sum$)

$$n \geq \max(N_1, N_2(\varepsilon)), \quad p \in \mathbb{N}. \quad \text{В преф.-и Абеля} \quad U_n(x) = 0, \quad U_k(x) = u_{n+1}(x) + \dots + u_k(x), \quad k \geq n+1$$

$$|U_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall k \geq n+1, x \in X$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{3M} |v_{n+p+1}(x)| + 0 \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ ряд сходится по Крит. Коши.

Замечание (перед признаком Дирихле-Абеля)

Если $\{v_n(x)\}$ монотонна, то $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (v_k(x) - v_{k+1}(x)) = v_{n+1}(x) - v_{n+p+1}(x)$$

$$(\text{Если } v_n(x) \geq v_{n+1}(x) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = v_{n+1}(x) - v_{n+p+1}(x))$$

$$\text{Если } v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = v_{n+p+1}(x) - v_{n+1}(x)$$

Признак Дирхле-Ядеа

Для равномерной сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ на X достаточно выполнения одной из 2-х пар условий:

I

- $\{v_n(x)\}$ равномерно огранич. на X ($S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$),
- $\{v_n(x)\}$ монотонна $\forall x \in X$, $v_n(x) \rightarrow 0$

II

- $\sum u_n(x)$ равномерно с. на множестве X , учитывают Дирхле
- $\{v_n(x)\}$ монотонна $\forall x \in X$, $\{v_n(x)\}$ равномерно сходящаяся (признак Ядеа, "местный")

Д-во:] (I) выполнено {тогда, учитывая замечание}

$\{v_n\}$ сход. равн. на $X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$

$$|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)| < \varepsilon$$

Но согласно замечанию, $|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \varepsilon$
 $\Rightarrow$ выполнены все условия 2-го пр. Ядеа

III) Выполнено

$\exists M: |v_n(x)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X$

$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \Rightarrow |v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, k \geq n+1$

$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varepsilon}{3M} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{3M} |v_{n+p}(x)| \neq 0 =$

$= \text{зап. } \frac{\varepsilon}{3M} |v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)| + \frac{\varepsilon}{3M} |v_{n+p}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3M} (|v_{n+1}(x)| + |v_{n+p}(x)|) \leq \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 2M = \frac{2\varepsilon}{3}$

Т.о., ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно по критерию Коши.

Замечание: Если $\{v_n(x)\}$ монот. по n и равн.с. огранич. $\nRightarrow \{v_n(x)\}$ - по-м. с равн.с. огранич. на X .!!!!

Пример 1 $x^n = v_n(x)$ $X = [0, 1]$ - монотонна, равномерно ограничена.

Но $\{x^n\}$ не сходится равномерно на отрезке $[0, 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не абелева послед-ть с равн.с. огранич.

//Тогда... Тогда еще по-м. с равн.с. огранич. $\Rightarrow$ она с. равномерно? ... хм... да нет!

Пример 2: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$, $p > 0$] $X = [\delta, 2\pi - \delta]$
 $0 < \delta < \pi$ $\delta \in (0, \pi)$

Мы знаем, что $|S_n^{(p)}(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M$

$|S_n^{(p)}(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M$

$\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$, не зависит от $x \Rightarrow$ она равномерно стремится к 0 ($v_n(x) \geq 0$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ выполнены 1-я пара условий признака Дирхле-Ядеа.

Пример 3 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ сход. равномерно на $[0, 1]$

Дирхле-Ядеа. // Верифицируем не проверяя, т.к. мы не знаем, что $\sum a_n$ абсолютно сходящаяся.
Д-во: $\sum a_n$ сходится равномерно на $[0, 1]$, $\{x^n\}$ монотонна $\forall x \in [0, 1]$ и $|x^{n+1}| \leq 1$

Свойства равномерной сходимости последовательностей и рядов

Лемма 1 (о предельном переходе)

$f_n(x) \rightarrow f(x)$; x_0 - предельная точка мн-ва X (может $\in$ или $\notin$ множеству X)

X] $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = b_n$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} b_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$)

Д-во: 1. Сх-ты $\{b_n\}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$

$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$ (*)

В (*) $x \rightarrow x_0 \Rightarrow |b_n - b_{n+p}| \leq \varepsilon$ $\Rightarrow \{b_n\}$ сходящаяся по критерию Коши; (переходим к пределу)

2. $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ Покажем, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon): \forall n \geq N_1(\varepsilon) |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|f(x) - b| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - b_n + b_n - b| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - b_n|$. Т.к. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = b_n \Rightarrow \exists \tilde{U}(x_0): \forall x \in \tilde{U}(x_0) |f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ (проходим окр-ть)

$\Rightarrow \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - b_n| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{U}(x_0) \forall x \in \tilde{U}(x_0) |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$

Лемма 1' (о предельном переходе)] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X ($x \in X$, т.е. $S_n(x)$)

x_0 - предельная точка X , $\forall n \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = a_n$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x)$

Д-во:

Применяем лемму 1 для $\{S_n(x)\}$ (по-м. с. равн. с. $\sum_{k=1}^n a_k(x)$)

Лекция 9 21.08

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сходится равн. на $x > 1$ $\xi(x)$
 $x_0 = 1$ - предельная точка $(1, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} \xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - ряд гармонический

Следствие 1 $\exists x_0 \in X$, x_0 - предельная точка X , $f_n \Rightarrow f$, $f_n(x)$ непрерыв. в точке $x_0(x \in X)$ не м. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказ.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0) = b_n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0)$$

Следствие 1' $\exists x_0 \in X$, x_0 - предельная точка X , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X , $a_n(x)$ непрерывны в точке x_0 . Тогда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непрерывна в x_0 .

Следствие 2 Пусть X - множество в себе замкнутое (т.е. $\forall$ точка множества X является предельной), $f_n \Rightarrow f$, $f_n \in C(X)$. Тогда $f \in C(X)$.

Следствие 2' $\exists X$ - множество в себе замкнутое, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X , $a_n \in C(X)$. Тогда $S \in C(X)$.

Замечание Условия равенства в следствиях 2, 2' являются лишь достаточными (но не необходимыми).

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) \in C(x > 1)$

Доказ. $(1, \infty) = \bigcup_{\delta > 0} [1+\delta, \infty)$. Докажем, что $\zeta(x) \in C(1+\delta, \infty) \forall \delta > 0$

$$\frac{1}{n^x} \in C(1+\delta, \infty), \frac{1}{n^x} \in \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \text{ с.к.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ сход. равно пр. к. в.} \Rightarrow \zeta(x) \in C(1+\delta, \infty)$$

сходится согласно следствию 2'.

Критерий Дини (две посл.) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in X$, причем:

1. X - компактно
2. $f_n \in C(X), n \in \mathbb{N}$
3. $f \in C(X)$
4. $\forall x \in X \{f_n(x)\}$ монотонно, или $\forall x \in X \{f_n(x)\}$ неубывающе.

Тогда $f_n \Rightarrow f$

Доказ. Достаточно рассмотреть $\forall x \in X \{f_n(x)\}$ неубывающе. "точечная сходимость" $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ задано.

$$\exists N(x) : \forall n \geq N(x) \quad f_n(x) - f(x) < \varepsilon.$$

$$\frac{f_{N_1}(x) - f(x) < \varepsilon}{f_{N_2}(x) - f(x) < \varepsilon} \Rightarrow (f_{N_1}(x) \leq f_{N_2}(x))$$

Непрерывность: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$f_{N_1}, f \in C(X) \Rightarrow$ непрерывно около точки x

$\exists U_x$ - окр-ть точки x : $\forall y \in U_x \quad f_{N_1}(y) - f(y) < \varepsilon$
(функции непрерывны)

$X \subset \bigcup_{x \in X} U_x \Rightarrow$ можно выделить конечное подмножество. $\exists x_1, \dots, x_k \in U_x$

$$N = \max(N_{x_1}, \dots, N_{x_k})$$

$\forall y \in X, \forall n \geq N$

$$\exists j \in \{1, \dots, k\} : y \in U_{x_j} \Rightarrow$$

$$f_n(y) - f(y) \leq f_{N_j}(y) - f(y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall y \in X, \forall n \geq N \quad 0 \leq f_n(y) - f(y) < \varepsilon \Rightarrow f_n \Rightarrow f \text{ по определению;}$$

монотонно убывает

// Тот же результат можно получить в задаче 1. // Это же можно?

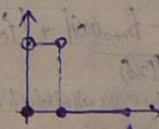
Покажем, что некоторые из условий 1-4 выполняются.

Пример 1 $f(x) = x^n, f(x) = 0, x \in [0, 1]$

(Нарушено условие 1, 2, 3, 4 выполняются)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N, n \geq N, x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_n(x) - f(x) = \frac{1}{2} > \varepsilon$$

Пример 2 $x \in [0, 1], f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$



Нарушено 1, условия 1, 3, 4 выполняются

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N, n \geq N, x = \frac{1}{2n} \Rightarrow f_n(x) - f(x) = 1 > \varepsilon$$

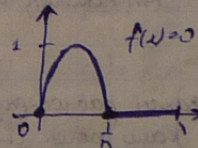
Пример 3 $x \in [0, 1], f_n(x) = x^n$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Равн. с-ти нет (т.к. с-ти нет на компактном множестве $[0, 1]$).
Нарушено 3 (1, 2, 4 выполняются)

Пример 4 $x \in [0, 1], f_n(x) = \begin{cases} \sin(n\pi x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(n\pi x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



1, 2, 3 - выполняются, 4 не выполняется

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad f_n(\frac{1}{2n}) = 1 > \varepsilon$$

Пример 5 Даны две послед. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x) = S(x)$, причем

1) X - компактно

2) $a_n \in C(X)$

3) $S \in C(X)$

4) $\forall x \in X, a_n(x) \geq 0$ или $\forall x \in X, a_n(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ ряд с.г. равномерно

Теорема 2 (дифференцируемость). Пусть $f_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$
 (м.о. $\forall x \in (a, b) \exists f'_n(x), \exists f'_n(a+0), \exists f'_n(b-0) \forall n \in \mathbb{N}$,
 причем $\{f'_n\}$ сход. равномерно на $[a, b]$, $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой
 в одной точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда $f_n(x)$ сход. равномерно на x
 к функции $f(x)$, $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), x \in [a, b]$ (т.е. $f'(a+0), f'(b-0)$ являются $f'(a+0), f'(b-0)$).

Доказ.

1. Покажем равномерную сходимость $\{f_n\}$ согласно критерию равномерной сходимости $\{f'_n\}$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n \geq N_1, \forall m \geq N_2 \forall x \in [a, b]$

$$|f'_n(x) - f'_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (\text{на концах покрываем отк. промежутки})$$

$$\{f'_n(x_0)\} \text{ сход.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n \geq N_2 \forall m \in \mathbb{N} |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x \in [a, b], n \geq \max(N_1, N_2), p \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \eta(x) &= f_n(x) - f_{n+p}(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{приращение функции} \\ \text{по переменной} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta'(x) = f'_n(x) - f'_{n+p}(x) = f'_n(x) - f'_n(x_0) + f'_n(x_0) - f'_{n+p}(x_0) + f'_{n+p}(x_0) - f'_{n+p}(x) \\ \eta(x_0) &= f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0) \end{aligned}$$

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| + |f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi)| |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon$$

$$\begin{aligned} f_n - f_{n+p} &= \eta(x) = \eta'(x)(x - x_0) \\ \eta'(x) &= f'_n(x) - f'_{n+p}(x) \Rightarrow |f'_n(x) - f'_{n+p}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Rightarrow f'_n \text{ сход. равномерно к } f'(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\forall y \in [a, b] g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}, g(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad x \in [a, b] \setminus y$$

y - предельная точка X

$$\lim_{x \rightarrow y} g_n(x) = f'_n(y); \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \quad (\text{по теореме 2})$$

$\Rightarrow$ если мы покажем, что $g_n(x) \rightarrow g(x)$ по критерию 1, то определим $f'(y)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(y)$$

Итак, покажем равномерную сходимость $\{g_n(x)\}$

Критерий Коши равен с-ти $f'_n(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \forall m \geq N \forall x \in X: |f'_n(x) - f'_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

$$|g_n(x) - g_{n+p}(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_{n+p}(x)}{x - y} - \frac{f_n(y) - f_{n+p}(y)}{x - y} \right| = \left| \frac{f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi)}{1} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \{g_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X по критерию Коши.

Теорема 2. Пусть $u_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сход. равномерно на $[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке

$x_0 \in [a, b]$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, к функции $S(x)$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

4.10.08 Лекция 10

Следствие 1. Пусть $f_n \equiv f$, причем f_n имеют первообразную на $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$

на $[a, b]$. Тогда f тоже имеет первообразную на отрезке $[a, b]$.

Более того, если $x_0 \in [a, b]$, P_n - первообразная f_n , удовлетворяющая $P_n(x_0) = 0$, то

$$P_n \equiv P, \text{ где } P \text{ - первообразная } f, P(x_0) = 0.$$

$$\text{Доказ. } P_n'(x) = f_n(x) = f(x), P_n(x_0) = 0 \Rightarrow \text{по теореме 2 } P_n \equiv P, P'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ т.е. } P \text{ - первообразная } f, P(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_0) = 0$$

Теорема 3 (интегрируемость)

Пусть $f_n \in R[a, b]$ / x интегрируемо Римана на $[a, b]$ / $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightarrow f$ на $[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$, причем $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$

(т.е. $\int \lim = \lim \int$ - интеграл от предела = предел интеграла)

Доказ. 1. Докажем интегрируемость f .

Покажем ограниченность f . $f_n \rightarrow f$ $\varepsilon = 1 \exists N: |f_n(x) - f(x)| \leq 1, x \in [a, b]$

$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$, $f_n(x)$ интегрируемо на $[a, b]$ $\Rightarrow$ ограничено на $[a, b]$

$$\Rightarrow \exists M: |f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| \leq M + 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

2. Можно воспользоваться критерием интегрируемости в терминах сум Дарбу.

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists P$ разбиение отрезка $[a, b]$: $S_+(f) - S_-(f) < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, x \in [a, b] \Rightarrow \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + f_n(x) < f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + f_n(x)$$

$$\forall \xi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b, S_+(f) = \sum_{j=1}^k M_j \Delta x_j, S_-(f_n) = \sum_{j=1}^k m_j^n \Delta x_j$$

(разбиение $[a, b]$)

3. Выводим сум Дарбу

$$S_+(f) = \sum_{j=1}^k M_j \Delta x_j, S_-(f_n) = \sum_{j=1}^k m_j^n \Delta x_j$$

$$M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f, m_j^n = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f_n, m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f, m_j^n = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f_n$$

$$(*) \Rightarrow x \in [x_{j-1}, x_j]: \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + m_j^n < f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + M_j^n$$

$$(**) \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + m_j^n \leq m_j \leq M_j \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + M_j^n \quad \forall 1 \leq j \leq k$$

$$\text{умножаем } (*) \text{ на } \Delta x_j, \text{ суммируем} \left| -\frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^k \Delta x_j + \sum_{j=1}^k m_j^n \Delta x_j \leq S_-(f) \leq S_-(f_n) \leq \sum_{j=1}^k M_j^n \Delta x_j + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^k \Delta x_j \right|$$

$$-\frac{\varepsilon}{4} + S_-(f_n) \leq S_-(f) \leq S_-(f_n) + \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |S_-(f) - S_-(f_n)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

но функция $f_n(x)$ интегрируема на $[a, b]$: $f_n \in R[a, b] \rightarrow \exists T$ -разделение $[a, b]$: по Риману.

$$\int_T (f_n) - \int_T (f) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \text{при } T=T \Rightarrow \int_T (f) - \int_T (f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow f \in R[a, b]$$

2. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \forall x \in [a, b] |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Оценим интеграл при $n \geq N(\varepsilon)$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \text{ и.т.д.}$$

(* более общее утверждение *)

То же самое для рядов:

Теорема 3' (о сходимости) Пусть $u_n \in R[a, b]$, неуб. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow$ (сход. ряд) к $S(x)$ на $[a, b]$. Тогда S интегрируема на $[a, b]$ (с $R[a, b]$), причем

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (\text{и.т.д. } \int S = \sum \int).$$

Замечание. Если не даны условия равномерной сходимости $\sum u_n(x)$, то $S(x)$ может быть неинтегрируемой.

Пример: $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - последовательность функций на отрезке $[0, 1]$

$$u_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad S(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = D(x) \text{ - функция Дирихле}$$

$D(x)$ не интегрируема на $[0, 1]$

Сходимости в среднем

Пусть $f_n \in R[a, b], f \in R[a, b]$

Определение. $\{f_n\}$ сходится в среднем к f на $[a, b]$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

f , вообще говоря, определена неединственным образом, можно изменить f в конечном числе точек

Определение

Ряд $\sum u_n(x)$ сходится в среднем к $S(x)$ на $[a, b]$, если $S_n(x)$ сходится в среднем к $S(x)$ на $[a, b]$ ($S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$).

Утв. 1. Если $f_n \in R[a, b], f_n \xrightarrow{L^1} f$, то $\{f_n\}$ сходится в среднем к f на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $f \in R[a, b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \forall x \in [a, b] |f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$$

$$n \geq N \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

Но обратное неверно: из сходимости в среднем не вытекает сходимости даже в точечном смысле на $[a, b]$

Замечание

Пример: $I_1 = [0, 1], I_2 = [0, \frac{1}{2}], I_3 = [\frac{1}{2}, 1], I_4 = [0, \frac{1}{4}], I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], I_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], I_7 = [\frac{3}{4}, 1]$

На n -м шаге будет 2^{n-1} отрезков

$$I_{2^n} = [0, \frac{1}{2^n}], I_{2^n+1} = [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], \dots, I_{2^{n+1}} = [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{2}{2^{n+1}}] \leftarrow 2^n \text{ отрезков}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_k \\ 0, & x \notin I_k \end{cases}$$

$\{f_n(x)\}$ сходится в точках $x \in [a, b]$, т.е. содержит бесконечно много точек сходимости.

Однако $f_n(x)$ сходится в среднем к нулю.

$$\int_a^b (f_n(x) - 0)^2 dx = |I_k| \leftarrow \text{длина } I_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

// выключить в записи примеров. Похоже, что функция не сходит.

Утв. 2. Если $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на $[a, b]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

$$\text{и.т.д. } \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| \sqrt{\frac{b-a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{b-a}} \leq |f_n(x) - f(x)|^2 \frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\begin{aligned} \text{Оценим разность между интегралами } \int_a^b f_n(x) dx \text{ и } \int_a^b f(x) dx \\ \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \frac{b-a}{2} dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \\ = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \frac{b-a}{2} dx + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$ где достаточно выбрать n

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx} \quad \text{можно просто воспользоваться неравенством Коши-Бунковского}$$

Утв. 3. Если $\{f_n\}$ сходится в среднем на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

Док-во: $\alpha + \beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}$ Пусть $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} + \beta^2 + \beta + \frac{1}{4} & \Rightarrow (\alpha + \frac{1}{2})^2 + (\beta + \frac{1}{2})^2 \leq |f_n(x) - f(x)|^2 + f(x)^2 + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx & \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx + \int_a^b f(x)^2 dx + \frac{b-a}{4} \\ \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx & \rightarrow \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Но он был...

Пример

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ n^\alpha, & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \rightarrow 0 = f(x)$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^{-\alpha} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^{-\alpha} \rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

$$\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$$

⇒ можно интегрировать почленно, но сходимости в среднем нет.

9.10.08

Лекция 11

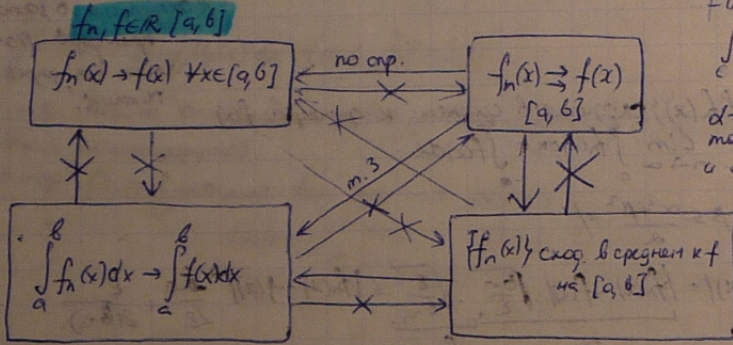
$$f(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall n$$

$$\{f_n(x)\} \text{ сходимости в среднем на } \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 1 \quad \alpha < 1$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ - можно почленно интегрировать, но не сходимости в среднем.

$$f_n, f \in R[a,b]$$



$$f_n(x) = \frac{f(x)}{n} \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx = \frac{1}{n} \int_a^b f(x) dx \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

$\alpha = 2$ есть сходимости в среднем, нет и сходимости в среднем

Равностепенная непрерывность и теорема Арцелы

Но в курсе, по т. Вейерштрасса, $\{f_n\}$ - сходящаяся к f на X не означает, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

$\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена на X ⇒ из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность? Нет!

Пример $\{x^n\}$ на $[0,1]$ не сходящаяся равномерно, т.к. сходимости к разрывной функции $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\{x^n\}$ - подпоследовательность, тогда она сходимости к разрывной функции $f(x)$, значения и сходимости равномерна.

Определение $\{f_n(x)\}$ называют равномерной непрерывностью на $[a,b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x', x'' \in [a,b] |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Замечание

Если $\{f_n(x)\}$ равномерна непрерывна на $[a,b]$ то $f_n \in C[a,b]$.

Теорема Арцелы Пусть $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\exists \{f_{n_k}(x)\}$ - равномерна сходящаяся на $[a,b]$

Множество называют компактным, если его замкнутое дополнение к нему пусто.

Доказательство:

I. $\{x_n\}$ - последовательность точек на $[a,b]$

$\forall \delta > 0 \exists N(\delta)$ - любой интервал $(\alpha, \beta) \subset [a,b], \beta - \alpha = \delta$ содержит одну из точек $x_1, \dots, x_N$

Проведем построение:

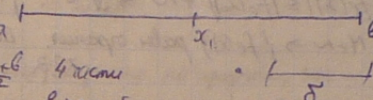
1 шаг $x_1 = \frac{a+b}{2}$ - середина

2 шаг $x_2 = \frac{a+x_1}{2}, x_3 = \frac{x_1+b}{2}$ - четверти

3 шаг x_4, x_5, x_6, x_7 - восьмые

k-й шаг $x_{2^{k-1}+1}, \dots, x_{2^k}$ - 2^k точек

длина $\frac{b-a}{2^k}$



$k \cdot \frac{b-a}{2^k} < \delta \Rightarrow$ любой интервал длины δ содержит одну из точек $x_1, \dots, x_{2^k}$

II Строим последовательности подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, сходящиеся в точке x_k .

$x_1 \{f_n(x_1)\}$ - числовая последовательность ⇒ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность (равн. о.р. ⇒ ограниченна) $\Rightarrow \{f_{n_1}(x_1)\}$ - подпоследовательность, сходящаяся в x_1 .

$\Rightarrow f_{n_1}(x_1), f_{n_2}(x_1), \dots$ сходящиеся в x_1 .

$x_2 \{f_n(x_2)\}$ - о.р. чисел ⇒ $\{f_{n_2}(x_2)\}$ сходящиеся в x_2 .

$f_{n_2}(x_2), f_{n_3}(x_2), \dots$ сходящиеся в x_2 .

$f_{n_1}(x_1), f_{n_2}(x_1), \dots, f_{n_k}(x_1)$ сходящиеся в $x_1, x_2, \dots, x_k$.

$f_{n_1}(x_1), f_{n_2}(x_1), \dots, f_{n_k}(x_1)$ - подпоследовательность последовательности $f_{n_j}(x_j)$, сходящаяся в x_j .

Возьмем диагональ последовательности $f_{n_j}(x_j)$.

III Шаг $\{f_{n_k}(x)\}$ сходящаяся равномерно на $[a,b]$ / докажем это

$g_k(x) = f_{n_k}(x)$ $\{g_k(x)\}$ равномерно непрерывна на $[a,b]$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a,b] |x' - x''| < \delta \Rightarrow |g_k(x') - g_k(x'')| < \varepsilon$

N : $\forall$ интервал длины δ содержит одну из точек $x_1, \dots, x_N$

Крит. Коши: сходимости $\{g_k(x)\}$ в точках $x_1, \dots, x_N$

$\exists N_1: \forall n \geq N_1, \forall r \in \mathbb{N} \quad \forall j=1, 2, \dots, N \Rightarrow |f_n(x_j) - f_{n+r}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x \in [a,b] \quad \forall n \geq N_1, \forall r \in \mathbb{N} \quad \exists x_j: |x - x_j| < \delta \quad 1 \leq j \leq N$

$|f_n(x) - f_{n+r}(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_{n+r}(x_j)| + |f_{n+r}(x_j) - f_{n+r}(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ (равн. непрерывность) $< \frac{\varepsilon}{3}$ по критерию Коши $< \frac{\varepsilon}{3}$ (равн. непрерывность)

⇒ $\{g_k(x)\}$ сходящаяся равномерно по критерию Коши.

Замечание: Если $\{f_n(x)\}$ равномерно непрерывна на $[a,b]$ и ограничена в точке $x \in [a,b] \Rightarrow$ она равномерно ограничена на $[a,b]$.

Докажем это. Дано:

$$\rho = 1 \quad \exists \delta: \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \delta$$

Положим отрезок на равные части, длины которых $< \delta$.

$$a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$$

$\forall x \in [a, b]$ (напр. $x = x_0$)

$y_1 < \dots < y_n$ - все точки разделения, лежащие между x_0 и x .

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(y_1)| + |f(y_1) - f(y_2)| + \dots + |f(y_n) - f(x_0)| \leq n \cdot \delta$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \quad |f(x)| \leq |f(x_0)| + n \cdot \delta \Rightarrow \exists M : |f(x)| < M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow |f(x)| < M + n \cdot \delta \Rightarrow \{f(x)\} \text{ равн. огранич.} \quad \text{т.е.}$$

// нужен признак равн. непрерывности.

Признак равномерной непрерывности

Пусть $\forall n \quad f_n(x)$ дифф. на $[a, b]$, причем $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничено.

Тогда $\{f_n(x)\}$ равномерно равн. непрерыв.

Дока: $\exists M > 0: \forall n, \forall x \in [a, b] \quad |f_n'(x)| < M$

$$f_n(x') - f_n(x'') = f_n'(\xi)(x' - x'') \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \leq M \cdot |x' - x''| \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

то теорема Коши

$$\xi \in [x', x'']$$

$$\forall n, \forall x, x' \in [a, b] : |x' - x| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x)| \leq M \cdot \delta = \varepsilon, \text{ т.е.}$$

Степенные ряды

$$(*) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \{a_n\} - \text{чисел, или то} \\ \text{— степенной ряд, } a - \text{число} \leftarrow \text{вещное или комплексное}$$

$$\text{Рассмотрим } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- Теорема Коши-Адамара
1. Если $L = 0$, то $(*)$ сходится $\forall x \in \mathbb{R}$,
 2. Если $L = \infty$, то $(*)$ сходится лишь при $x = a$;
 3. Если $0 < L < \infty$, то $(*)$ сходится абсолютно при $|x-a| < \frac{1}{L}$,
 $(*)$ расходится при $|x-a| > \frac{1}{L}$.

$$\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \begin{matrix} |x-a| < R \\ (*) \text{ сход.} \\ |x-a| > R \\ (*) \text{ расход.} \end{matrix} \quad R - \text{радиус сходимости}$$

формула Коши-Адамара, R радиус

11.10.08

лекция 12

$$(*) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Теорема Коши-Адамара 1. Если $L = 0$, то $(*)$ сходится (даже абсолютно) $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $L = \infty \Rightarrow (*)$ сходится $\Leftrightarrow x = a$

3. $0 < L < \infty \Rightarrow (*)$ сходится абсолютно $|x-a| < \frac{1}{L}$, $(*)$ расходится $|x-a| > \frac{1}{L}$.

Доказательство:

$$1. L = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \forall x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x-a|^n = |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \text{реш } (*)$$

сходится абсолютно $\forall x \in \mathbb{R}$ по признаку Коши.

$$L = \infty \Rightarrow \exists \{n_k\} : \text{при } k \rightarrow \infty \quad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow \infty \quad (\text{т.е. } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \infty)$$

$$\Rightarrow \forall x \neq a \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} |x-a|^{n_k} = \infty \Rightarrow \exists K: \forall k \geq K \quad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} |x-a|^{n_k} \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a_{n_k} (x-a)^{n_k}| \geq 1 \Rightarrow$$

// из исходной бесконечной числовой последовательности, по лемме Больцано-Вейерштрасса, можно выделить сходящуюся к 0 подпоследовательность.

$\Rightarrow$ общий член ряда $(*)$ не сходится к 0 $\Rightarrow (*)$ расходится.

2. Пусть $|x-a| < \frac{1}{L} \Rightarrow |x-a| < \frac{1}{L+2\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} |x-a|^n < \frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon} = q < 1 \Rightarrow (*) \text{ сходится по признаку Коши в непрерывной форме.}$$

$$\delta) \text{ Пусть } |x-a| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad |x-a| > \frac{1}{L+\varepsilon} \Rightarrow \exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow L \Rightarrow \exists K(\varepsilon): \forall k \geq K$$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > L - \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} |x-a|^{n_k} > \frac{L-\varepsilon}{L+\varepsilon} > 1, \quad k \geq K \Rightarrow |a_{n_k} (x-a)^{n_k}| > 1 \Rightarrow (*) \text{ расходится, т.к. не выполняются необходимые условия сходимости.}$$

т.е.

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0 \right) \\ \text{— формула Коши-Адамара}$$

$|x-a| < R \Rightarrow (*)$ сходится абсолютно

$|x-a| > R \Rightarrow (*)$ расходится

R — радиус сходимости

Замечание 1 $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ и целое число $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, то $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

$$(\text{т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Замечание 2 Если $x = a \pm R$, то может быть что угодно.

В частности

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ сходится } \Leftrightarrow |x| < 1, \text{ т.к. } 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \text{ сходится } \Leftrightarrow x \in [-1, 1) \quad (x=1 - \text{расход.})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \text{ сходится } \Leftrightarrow |x| \leq 1$$

Упр. 1

Пусть $R > 0$, R — радиус сходимости ряда $(*)$, тогда $\forall r \in (0, R)$ $(*)$ сходится равномерно на $|x-a| \leq r$

Доказательство: $x = a + r$, по теореме Коши-Адамара

ряд $(*)$ сходится абсолютно в точке $a+r$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ сходится. Рассмотрим } X = [a-r, a+r] \quad \forall x \in X \quad |a_n (x-a)^n| \leq |a_n| r^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow (*)$ сходится равномерно на X по признаку Вейерштрасса.

Замечание

В степенном ряду не сходится равномерно на всем интервале сходимости!!!

Пример

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R=1$ на множестве $|x| < 1$ ряд не сходится равномерно (иначе по теореме о предельном переходе $\exists \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1-0} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ - расходясь $\exists$))

Теорема Жана. Пусть (x_n) сходится в точке x_0 . Тогда (x_n) сходится равномерно на отрезке с концами a и x_0 .

Доказательство: $x_0 \neq a$ $a_n(x-a)^n = a_n \cdot (x_0-a)^n \sim \left[\frac{x-a}{x_0-a} \right]^n$

X - отрезок с концами a и x_0 . $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ сходится и его члены не зависят от $x \Rightarrow$ ряд сходится равномерно на X .
 $x \in X \Rightarrow \frac{x-a}{x_0-a} = \alpha \in [q, 1]$

$|u_n(x)| \leq 1$, $u_n(x)$ неубывает $\forall x \Rightarrow$ (x_n) сходится равномерно на множестве X , т.к. (т.е. монотонность u_n) влечет Φ второй парк условий признака

Дирхле-Абеля.

Свойства суммы степенного ряда

Теорема 1 (непрерывность) Сумма $S(x)$ степенного ряда (x) непрерывна на $|x-a| < R$ (R -радиус сходимости (x))

Доказ. $\forall x \in (a-R, a+R) \Rightarrow \exists \rho \in (0, R): x \in (a-\rho, a+\rho)$

По утверждению (x) сходится равномерно на $[a-\rho, a+\rho]$; все члены (x) непрерывны на $[a-\rho, a+\rho] \Rightarrow S(x) \in [a-\rho, a+\rho] \Rightarrow S$ непрерывна в x . т.к. $x \Rightarrow S$ непрерывна на $(a-R, a+R)$

Вспомогат. лемма Пусть $\alpha_n > 0, \beta_n \geq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$ $0 < \beta \leq \infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n = \beta$

Доказательство: $1, \beta \neq \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n \geq N_1, \beta_n < \beta + \varepsilon$

$\exists N_2: \forall n \geq N_2, \alpha_n < 1 + \varepsilon$

Возьмем $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ $\alpha_n \beta_n < (\beta + \varepsilon)(1 + \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n \leq (\beta + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$

т.к. $\varepsilon > 0$ любое, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n \leq \beta$ ①

$\exists \beta_{n_k} \rightarrow \beta$ по $\alpha_{n_k} \rightarrow 1 \Rightarrow \beta_{n_k} \cdot \alpha_{n_k} \rightarrow \beta \Rightarrow \beta$ предельная точка $\alpha_n \beta_n$ ② $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n = \beta$

Доказательство: $\alpha, \beta = \infty$

$\exists \beta_{n_k} \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} \cdot \alpha_{n_k} = \infty \Rightarrow \infty$ - предельная точка последовательности $\alpha_n \beta_n$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n = \infty$

Теорема 2 (интегрируемость) На $(a-R, a+R)$ степенной ряд (x) можно интегрировать почленно, т.е. если $S(x)$ - сумма ряда (x) , то

$$\int_a^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \quad (**), \text{ при чем радиус сходимости } (***) \text{ равен } R!$$

Доказательство: $x \in (a-R, a+R) \Rightarrow \exists \rho \in (0, R): x \in (a-\rho, a+\rho)$ (x) сходится равномерно на $[a-\rho, a+\rho]$. Все члены ряда интегрируемы $\Rightarrow$ можно почленно интегрировать по отрезку с концами x и a . Найдем радиус сходимости $(***)$.

$(***)$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$ сходится. // умнож на $(x-a)$ раз α_n

$\beta_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \alpha_n = \sqrt[n]{n+1} \Rightarrow \beta_n > 0, \alpha_n > 0 \Rightarrow$ по вспомогат. теореме $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

Теорема 3 (Дифференцирование суммы степенного ряда)

$S(x)$ дифф на $(a-R, a+R)$

$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-a)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-a)^{n-1}$ $(x \neq x_0)$, при чем радиус сходимости ряда $(***)$ равен R .

Доказательство: Покажем, что радиус сходимости $(***)$ равен R .

$(***)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$

$\beta_n = \sqrt[n]{n|a_n|}, \alpha_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$; по вспомогат. теореме

т.о. $(***)$ сходится равномерно на $[a-\rho, a+\rho], \rho \in (0, R)$, (x) сходится при $x=a$

$\Rightarrow$ $(*)$ можно дифф-ть почленно на $[a-\rho, a+\rho]$. т.к. $\rho \in (0, R)$ - любое, то (x) можно дифф-ть на $(a-R, a+R)$ // следует из теоремы о почленном дифференцировании

показано, что $\sum$ степенного ряда почленно дифференцируема! Ура.

Следствие 1 $S(x) \in C^\infty(a-R, a+R)$, при чем $\forall k \in \mathbb{N}$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x-a)^n)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot \dots \cdot (n-k+1) (x-a)^{n-k} + \text{применить } k \text{ раз теорему 3.}$$

Следствие 2

$a_0 = S(a)$, $a_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}$

при чем $x=a$

$$S^{(k)}(a) = k(k-1) \dots 1 \cdot a_k = k! a_k$$

Пример:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ сходится по теореме Абеля}$$

$\Rightarrow$ сумма ряда непрерывна на $|x| \leq 1 \Rightarrow \arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$

Задача: разложить в степенной ряд $\arctg(x^{10}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{10(2n+1)}}{2n+1}, x \in [-1, 1]$

Разложение функций в степенной ряд

Опр. $f(x)$ разлож. в степен. ряд по степеням $(x-a)$ на $(a-z, a+z)$, если существует $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = f(x)$, $x \in (a-z, a+z)$.

Замечание: можно рассуждать и $[-1, 1]$, $(-1, 1)$.

Замечание! Если $f(x)$ разлож. в степен. ряд, то $x \in R_{\text{сх}}$, $R_{\text{сх}}$ - радиус сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

Необходимые условия разложения функции в степенной ряд

Если f разлож. в степенной ряд на $a-z, a+z$, то $f \in C^{\infty}(a-z, a+z) \leftarrow$ т.к. сумма степенного ряда ∞ дифференцируема.

Единственность разложения в степенной ряд

Если $f(x)$ разлож. в степенной ряд по степеням $(x-a)$ на $(a-z, a+z)$, то представим ее степенного ряда единственно.

Доказ. по следствию 2 теоремы 3 $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n=0, 1, \dots$ // -опред. однозначно

Опр. Пусть $f \in C^{\infty}(a-z, a+z)$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ называют рядом Тейлора функции f с центром в точке a .

Утв. Если $f(x)$ разложима в степен. ряд по степеням $(x-a)$ на $(a-z, a+z)$, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$

Пример (Коши)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \quad f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \quad P_k \left(\frac{1}{x} \right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}$$

По индукции $k \leq n-1$ верно.

$$k=n \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \left(e^{-\frac{1}{x^2}} P_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right) \right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} \right) +$$

$$+ e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{a_1}{x^2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}+1} \cdot \frac{1}{x} \right) \Rightarrow f^{(n)}(x) - \text{произведение эксп. на многочлен}$$

Итак $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = 0, \dots, \quad f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0 \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{поэтому} \quad f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - 0}{x} = 0$$

Но $f^{(k-1)}(0) = 0$

Если бы функцию разлагали в степен. ряд с центром в $m \neq 0 \Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \dots$
но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R} \quad R_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{остаток ряда Тейлора}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R} \quad \cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (-1, 1]$$

$|x| < 1$ верно (сх.)

$x = -1$ ряд расх. $|x| = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ сход. по признаку Лейбница.

По теореме Абеля

ряд сходится равномерно на $[0, 1] \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна на $[0, 1]$

$$\text{Но } \ln(1+x) \in C[0, 1] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow S_a = M \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$$

$$1. \text{ Линеарность } M \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) = S_a, \quad M \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = S_b \Rightarrow \forall \alpha, \beta \quad M \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \right) = \alpha S_a + \beta S_b$$

$$2. \text{ Реперность } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow M \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) = S$$

Метод средних арифметических (метод Цезаря $(C, 1)$ метод)

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sigma_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n}$$

(*) сумм. $(C, 1)$ метод κS если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S$

линейность, непрерывность, реперность выполняются.

$$1-1+1-1+\dots \quad S_{2n+1} = 1, \quad S_{2n} = 0 \Rightarrow \sigma_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}, \quad \sigma_{2n} = \frac{0}{2n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$$

Утв. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется по Цезарю $(C, 1)$ мет. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$

$$\text{Доказ. } S_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}, \quad a_n = S_n - S_{n-1} = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1} - (n-1)\sigma_n + (n-2)\sigma_{n-2} \\ \frac{a_n}{n} \rightarrow S - S - S + S = 0$$

Метод Пуассона-Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \quad (*)$$

Опр. Если (*) сходится при $|x| < 1$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \right) = S \Rightarrow S$ - сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мет. П.-А.
линейность - очевидна.

Результат следует из теоремы Абеля: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (ряд $\sum a_n x^n$ сходит при $x=1$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ (с) с.р. в н.а. [91] $\Rightarrow$ сумма S ряда $\sum a_n x^n$ н.а. на [91]

$$\text{т.е. } \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1^n = S$$

$$1-1+1-1+1-1 \dots \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{-n} = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=1-0} = \frac{1}{2}$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^n x^k = -\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^n (x^k - x^{k+1}) + \sum_{j=n}^n x^n = -\sum_{k=1}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) + x^n = 1 - x^n$$

Лемма Ляпун $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n$ с.р. при $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} S_{n-1} x^n = S_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n = S_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Док-во: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} S_k (x^k - x^{k+1}) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k+1}$, т.е.

$\forall x \in (-1, 1) \exists \rho: |x| < \rho < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n$ сходится $\Rightarrow \{a_n \rho^n\}$ огранич. $\Rightarrow$
 $(\exists M) \exists N: |a_n \rho^n| < M \quad |a_n| < \frac{M}{\rho^n}$

$$|S_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n| \leq M \left(\frac{1}{\rho} + \dots + \frac{1}{\rho^n} \right) = \frac{M}{\rho^n} (1 + \dots + \rho^{n-1}) < \frac{M}{\rho^n} \frac{1}{1-\rho}$$

$$|S_n x^n| \leq \frac{M}{(\rho-x)^n} \left(\frac{|x|}{\rho} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Теорема Фробениуса Если ряд сходимости (c_n) м.п. к S , то ряд сходимости и методом π -А. к S .

Док-во: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \frac{a_n}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists \varepsilon: |a_n| \leq \varepsilon \cdot n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varepsilon n} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ радиус сходимости $(\rho) \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \quad S_n = n b_n (1-x)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - S \right| = (1-x)^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n - S) x^{n-1} \right| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n \quad S \cdot 1 = S(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$\varepsilon \rightarrow S \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \quad |a_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\textcircled{=} \underbrace{(1-x)^2 \left(\sum_{n=1}^N n (a_n - S) x^{n-1} \right)}_1 + \underbrace{(1-x)^2 \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n (a_n - S) x^{n-1} \right)}_2$$

$$\underbrace{1}_2 \leq (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n \cdot \frac{\varepsilon}{2} x^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underbrace{1}_1 = (1-x)^2 \left(\sum_{n=1}^N n (a_n - S) x^{n-1} \right) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 1-0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

$\Rightarrow \exists \delta: \forall x \in (1-\delta, 1) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - S \right| < \varepsilon$

Из сходимости метода π -А. $\Rightarrow$ сходимости методом [с, 1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot \frac{a_n}{n} \neq 0 \Rightarrow \text{ряд расходящийся [с, 1] не сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n (-x)^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Big|_{x=1-0} = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ при } x \rightarrow 1-0$$

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$A \subset \mathbb{R}^n$ т.р. A называется внутренним точкой множества A , если $\exists$ открыт. шар U с центром в т.р. P , целиком содержащий A .

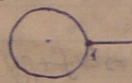
Совокупность всех внутренних точек множества A обозначается $\text{int } A$

∂A — замыкание множества A , если в ∂A содержатся точки P (в любой

окрестности шара с центром в точке P) лежат точки из множества A .

$\partial A = \bar{A} \setminus \text{int } A$ — граница множества A .

Граница. Пример:



$$A = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cap [1, 2]$$

$$\text{int } A = \{x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\bar{A} = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cup [1, 2]$$

$$\partial A = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup [1, 2]$$

$\mathcal{I}A$ — измеримое (=квасиизмеримое) множество в $\mathbb{R}^2$ (это означает, что A ограничено

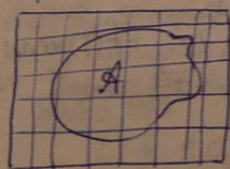
$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon$ — элементарная фигура (объединение конечного числа прямоугольников со сторонами, l_i -ми своим координат) $\mu(P_\varepsilon) < \varepsilon, \partial A \subset P_\varepsilon$

A — ограниченное измеримое множество

Разбиение $\mathcal{T}: A = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i$ измеримо, $\text{int } A_i \cap \text{int } A_j = \emptyset, i \neq j$

$$\text{diam } A_i = \sup_{P, Q \in A_i} |P - Q| \quad d_{\mathcal{T}} = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } A_i$$

Пример: прямоугольное разбиение.



$$A \subset [a, b] \times [c, d]$$

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$c \leq y_0 < y_1 < \dots < y_l = d$$

$$A_i = A \cap R_{ij} \text{ — измеримо, } \exists \text{ общих внутр. точек} \quad \mathcal{T}: A = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$d_{\mathcal{T}} \leq \max_{i,j} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

$$1 \leq i \leq n$$

Функция f определена на множестве A ; $T: P \in A_j, 1 \leq j \leq n$

опр $\sigma_T(f, A_1, \dots, A_n) = \sum_{j=1}^n f(P_j) \cdot \mu(A_j)$ - интегральная сумма
 f называем интегрируемой на множестве A (по множеству A), если $\exists I$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta, \forall P_1, \dots, P_n, \text{ где } P_j \in A_j, \quad |\sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) - I| < \varepsilon$

$$I = \iint_A f(x, y) dx dy \text{ или } I = \int_A f d\mu$$

Замечание 1 Если $\mu(A) = 0$, то любая f , определенная на A , является интегрируемой на A , $\int_A f d\mu = 0$

Доказательство: $\sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) = 0 \neq I, \forall P_1, \dots, P_n$

Замечание 2

Если $f = C$ - постоянная, то f интегр. на A , $\int_A C d\mu = C$

Доказательство: $\sigma_T(C, P_1, \dots, P_n) = C \sum_{j=1}^n \mu(A_j) = C \mu(A), \text{ т.е. } I$

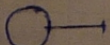
Справедливо свойство линейности.

Замечание 3 Если f, g интегрируемы на A , то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ интегрируема на A , причем $\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu$.

Доказательство:

$$\sigma_T(\alpha f + \beta g, P_1, \dots, P_n) = \alpha \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) + \beta \sigma_T(g, P_1, \dots, P_n) \rightarrow \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu$$

Замечание 4 Если f интегр. на A $\nRightarrow$ ограничена на A



$$f(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x-2} + 1, \quad x \in [1, 2]$$

$$f(x, y) = 0, \quad x=2, y=0$$

Умб-е (без доказат-ва)

если $A \subset \text{int} A$, то

f интегр. на $A \Rightarrow f$ огранич. на A .

Доказательство

$$P_n \rightarrow P \in \text{int} A$$

$$f(P_n) \rightarrow \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \text{ diam}(R) < \delta$$

$$\mu(R \cap A) > 0 \quad \left| \sum_{j=1}^n f(P_j) \mu(R \cap A_j) \right| > \varepsilon$$



КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

f - огранич., определена на A , $T: A = \bigcup_{j=1}^n A_j$

$$M_j = \sup_{A_j} f, \quad m_j = \inf_{A_j} f$$

$$S_T(f) = \sum_{j=1}^n M_j \mu(A_j), \quad s_T(f) = \sum_{j=1}^n m_j \mu(A_j)$$

верхняя

сумма

нижняя

сумма

по разбию

$$m_j \leq f(P_j) \leq M_j, \quad P_j \in A_j$$

$$(1) \quad S_T(f) \leq \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) \leq s_T(f) \quad \forall P_j \in A_j, 1 \leq j \leq n$$

$$(2) \quad S_T(f) = \sup_{P_j \in A_j, 1 \leq j \leq n} \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n), \quad s_T(f) = \inf_{P_j \in A_j, 1 \leq j \leq n} \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n)$$

Пустим с 2 разбиениями

$$T_1: A = \bigcup_{j=1}^{n_1} A_j^{(1)}, \quad T_2: A = \bigcup_{k=1}^{n_2} A_k^{(2)}$$

$$T_1 \cap T_2: A = \bigcup_{j=1}^{n_1} \bigcup_{k=1}^{n_2} (A_j^{(1)} \cap A_k^{(2)})$$

В частности, если T_1 и T_2 - прямоугольные разбиения, то $T_1 \cap T_2$ - прямоугольное разбиение (пересечение прямоугольников есть прямоугольник)

$$(3) \quad S_{T_1 \cap T_2} \leq S_{T_1}, \quad s_{T_1 \cap T_2} \geq s_{T_2}$$

Доказательство: $M_{j,k} = \sup_{A_j^{(1)} \cap A_k^{(2)}} f \leq \sup_{A_j^{(1)}} f = M_j^{(1)}$
 $S_{T_1 \cap T_2}(f) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} M_{j,k} \mu(A_j^{(1)} \cap A_k^{(2)}) \leq \sum_{j=1}^{n_1} M_j^{(1)} \sum_{k=1}^{n_2} \mu(A_j^{(1)} \cap A_k^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n_1} M_j^{(1)} \mu(A_j^{(1)}) = S_{T_1}(f)$

$$(4) \quad \forall T_1, T_2 \quad S_{T_2}(f) \leq S_{T_1}(f), \text{ т.е. (используя 3)}$$

$$S_{T_2}(f) \leq S_{T_1 \cap T_2} \stackrel{(1)}{\leq} S_{T_1 \cap T_2}(f) \stackrel{(3)}{\leq} S_{T_1}(f)$$

(5) Множество $\{S_T(f)\}$ ограничено снизу любой $S_{T_1}(f)$
 множество $\{s_T(f)\}$ ограничено сверху любой $s_{T_1}(f)$
 $\Rightarrow \Gamma^* = \inf_T S_T(f)$
 $I_* = \sup_T s_T(f)$

$$\Rightarrow (6) \quad I_* \leq \Gamma^* \quad \text{Тогда мы}$$

$$(6) \quad \text{Если } \inf_T S_T(f) \Rightarrow \forall T_2 \quad S_{T_2} \leq \Gamma^*, \text{ берем } \inf_{T_2} S_{T_2}(f) \Rightarrow I_* \leq \Gamma^*$$

Первый критерий интегрируемости ограниченной функции:

$$f \text{ интегр. на } A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta \quad S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

Доказательство: f интегр. на $A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta, \forall P_1, \dots, P_n, P_j \in A_j$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{из (2)} \quad S_T(f) = \sup_{P_1, \dots, P_n; P_j \in A_j} \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{берем супремум}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_T(f) \Rightarrow S_T(f) - s_T(f) \leq (I + \frac{\varepsilon}{3}) - (I - \frac{\varepsilon}{3}) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta \quad S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

$$S_T(f) \leq I_* \leq I^* \leq S_T(f) \quad \forall T$$

$$I^* = I_* = I \text{ покажем, что } \int f d\mu = I$$

$$\forall p_1, \dots, p_n \quad S_T(f) \leq G_T(f, p_1, \dots, p_n) \leq S_T(f)$$

$$S_T(f) \leq I \leq S_T(f)$$

$$\Rightarrow |G_T(f, p_1, \dots, p_n) - I| \leq S_T(f) - S_T(f) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T \quad d_T < \delta \Rightarrow |G_T(f, p_1, \dots, p_n) - I| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{f. инт.}, \int f d\mu = I!$$

Следствие Если f интгр. на A , то $I^* = I_* = \int f d\mu$.

Второй критерий инт-ти: f интгр. на $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T: S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$.

Нужно только следовать из 1-го критерия инт-ти.

23.10.08

Лекция 15

ВЗ! Это -

- 2-я часть лекции:)

Третий критерий инт-ти

f инт-на на $A \Leftrightarrow I^* = I_*$. При этом $I = I^* = I_* = \int f d\mu$

Док-во: $\Rightarrow$ следствие из 1-го критерия инт-ти.

$$\Leftrightarrow I_* = I^* \stackrel{\text{def}}{=} I$$

$$\exists T_1, T_2 \text{ - разбиения } A: S_{T_2} < I^* + \varepsilon, S_{T_1} > I_* - \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < S_{T_1}(f) \leq S_{T_1 \cap T_2}(f) \leq S_{T_1 \cap T_2}(f) \leq S_{T_2}(f) < I^* + \varepsilon$$

$$S_{T_1 \cap T_2} - S_{T_1 \cap T_1} < 2\varepsilon \Rightarrow \text{f. инт-на по 2-му критерию инт-ти, } I = I_* = I^*$$

Опр. f инт-на на A в смысле прямоугольных разбиений, если $\exists I_{np}: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T_{np}: A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ - прямоуг. разбиение A , $d_{T_{np}} < \delta, \forall p_i \in A_1, \dots, p_n \in A_n$

$$|G_{T_{np}}(f, p_1, \dots, p_n) - I_{np}| < \varepsilon$$

Утв. Ограниченная функция f инт-на на $A \Leftrightarrow f$ инт-на в смысле прямоуг. разбиений. При этом $I_{np} = \int f d\mu$.

Док-во $\Rightarrow f$ инт-на $\Rightarrow |G_T(f, p_1, \dots, p_n) - \int f d\mu| < \varepsilon \quad \forall T: d_{T_{np}} < \delta$, в том числе и

$$\text{для } T_{np} \Rightarrow I_{np} = \int f d\mu.$$

$\Leftarrow f$ инт-на в смысле прямоуг. разбиений $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T_{np}: |G_{T_{np}}(f, p_1, \dots, p_n) - I_{np}| < \varepsilon$,

$$S_{T_{np}} = \sup_{(p_1, \dots, p_n)} G_{T_{np}}(f, p_1, \dots, p_n)$$

$$s_{T_{np}} = \inf_{(p_1, \dots, p_n)} G_{T_{np}}(f, p_1, \dots, p_n)$$

ну это же очевидно!

$$+ I_{np} - \varepsilon \leq S_{T_{np}} \leq S_{T_{np}} \leq I_{np} + \varepsilon \Rightarrow S_{T_{np}}(f) - s_{T_{np}}(f) < 2\varepsilon < 3\varepsilon \Rightarrow f \text{ инт-на по 2-му критерию инт-ти.}$$

Достаточные условия инт-ти

Теорема Пусть A - замкнутое измеримое мн-во, $f \in C(A) \Rightarrow f$ инт-на на A

Док-во: Если $\mu(A) = 0 \Rightarrow f$ инт-на на A .

Если $\mu(A) \neq 0 \Rightarrow f$ равнос. непр-на на $A, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall P, Q: s(P, Q) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon/2\mu(A).$

$$\forall T: d_T < \delta \quad A = \bigcup_{j=1}^n A_j$$

$$\forall p_i, q_i \in A_j \quad |f(p_i) - f(q_i)| < \varepsilon/2\mu(A)$$

$$M_j - m_j \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(A)} \quad (M_j = \sup_{x \in A_j} f(x), m_j = \inf_{x \in A_j} f(x))$$

$$S_T(f) - s_T(f) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \mu(A_j) \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(A)} \sum_{j=1}^n \mu(A_j) = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f \text{ инт-на по 1-му критерию инт-ти}$$

Теорема A - замкнутое измеримое множество, f огранич. на $A, \forall B \subset A: \mu(B) = 0, f \in C(A \setminus B) \Rightarrow f$ инт-на на A .

Док-во: $\exists L: |f| \leq L$ на A

$$\exists \Phi: B \subset \Phi, \mu(\Phi) < \varepsilon/4L \quad \forall \varepsilon > 0 \quad B \subset \text{int } \Phi$$

$$A = (A \setminus \text{int } \Phi) \cup (A \cap \text{int } \Phi)$$

$A \setminus \text{int } \Phi$ - измеримое, замкнутое, $f \in C(A \setminus \text{int } \Phi) \Rightarrow f$ инт-на на $A \setminus \text{int } \Phi$;

$$\exists T: A \setminus \text{int } \Phi = \bigcup_{j=1}^n A_j, \quad S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon/2$$

$$A_{n+1} = A \cap \text{int } \Phi$$

$$T = \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j \quad S_T(f) - s_T(f) = S_T(f) - s_T(f) + (\sup_{A_{n+1}} f - \inf_{A_{n+1}} f) \mu(A_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2L \cdot \frac{\varepsilon}{4L} = \varepsilon$$

1 часть лекции

1) Множество $\{S_T(f)\}$ ограничено снизу $\forall S_{T_2}(f) \Rightarrow I^* = \inf S_T(f)$

Множество $\{s_T(f)\}$ ограничено сверху $\forall s_{T_1}(f) \Rightarrow I_* = \sup s_T(f)$

$$(6) I_* \leq I^*$$

$$\forall (4) \quad \inf_{T_1} S_{T_1}(f) \Rightarrow \forall T_2 \quad S_{T_2}(f) \leq I^*$$

$$\text{т.е. } \inf_{T_2} S_{T_2}(f) \quad I_* \leq I^*$$

Первый критерий инт-ти огранич. функции

f интгр. на $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta \quad S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Док-во: f инт-на на $A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta$

(Нужно) $\forall p_1, \dots, p_n \quad p_i \in A_i$

$$I - \varepsilon_3 < G_T(f, p_1, \dots, p_n) < I + \varepsilon_3 \quad \text{из (2)} \quad S_T(f) = \sup_{p_1, \dots, p_n} G_T(f, p_1, \dots, p_n) \leq I + \varepsilon_3$$

$$S_T - s_T \leq (I + \varepsilon_3) - (I - \varepsilon_3) = 2\varepsilon_3 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{Достаточно } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta \quad S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

$$S_T \leq I_* \leq I^* \leq S_T \quad \forall T \Rightarrow I_* = I^* = I$$

Покажем $\int f d\mu = I$

$$\forall P_1, \dots, P_n \quad S_T \leq \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) \leq S_T \Rightarrow |\sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) - S_T| \leq S_T - S_T < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow S_T(f) \leq I \leq S_T$$

$$\Rightarrow \int_A f d\mu = I$$

Следствие Если f интегрируема на A , то $I^* = I_* = \int_A f d\mu$;

Второй критерий интегральной ограниченности функции

f интегр. на $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T: S_T(f) - S_T^*(f) < \varepsilon$

Доказ. $\Rightarrow$ очевидно из 1-го критерия

$$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T^*: A = \bigcup_{j=1}^n A_j^* \quad S_{T^*}(f) - S_{T^*}^*(f) < \varepsilon$$

$$\exists L: |f| < L \text{ на } A$$

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \partial A_j^* \quad \Gamma \text{ замкнуто, } \mu(\Gamma) = 0$$

$$\exists \Phi \text{ — элемент функции } \Gamma \subset \text{int } \Phi, \mu(\Phi) < \varepsilon/4L$$

(Если $\Gamma \subset \Phi$, то Γ — каждый элемент Φ "никого не рождает" от него центра)
 Φ — замкнутое м.б.; $\Gamma \cap \partial \Phi = \emptyset$

$$\exists \delta > 0: \forall P_1 \in \Gamma, P_2 \in \partial \Phi \quad \rho(P_1, P_2) > \delta$$

Покажем, что $\forall T \exists A = \bigcup_{k \in K} A_k \quad A_T \leq S_T \leq S_T^* + \varepsilon$ (тогда f интегрируема согласно 1-му критерию)

$$\{1, \dots, l\} = J_1 \cup J_2$$

$$k \in J_1, \text{ если } \exists A_j^*: A_k \subset A_j^*$$

$$k \in J_2, \text{ если } \nexists j \in \{1, \dots, n\}: A_k \subset A_j^*$$

Покажем, что если $k \in J_2$, то $A_k \subset \Phi$. $k \in J_2: \forall P \in A_k \exists j: P \in A_j^*$

$$T.к. A_k \not\subset A_j^*, \exists Q_1, Q_2 \in A_j^*, Q \in A_k \quad [PQ] \cap \partial A_j^* \neq \emptyset,$$

$$\xi \in [PQ] \cap \partial A_j^*, \xi \in \Gamma$$

$$\rho(P, \xi) \leq \rho(P, Q) < \delta, \text{ м.к. } d_k < \delta \text{ но } \rho(\xi, \partial \Phi) > \delta \Rightarrow P \in \text{int } \Phi \Rightarrow A_k \subset \Phi$$

$$M_k = \sup_{A_k} f, m_k = \inf_{A_k} f, M_j^* = \sup_{A_j^*} f, m_j^* = \inf_{A_j^*} f$$

$$S_T(f) - S_T^*(f) = \sum_{k \in K} (M_k - m_k) \mu(A_k) = \sum_{k \in J_1} (M_k - m_k) \mu(A_k) + \sum_{k \in J_2} (M_k - m_k) \mu(A_k)$$

$$\sum_{k \in J_2} (M_k - m_k) \mu(A_k) \leq 2L \sum_{k \in J_2} \mu(A_k) \leq 2L \mu(\Phi) \leq \varepsilon/2$$

$$\sum_{k \in J_1} (M_k - m_k) \mu(A_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k: A_k \subset A_j^*} (M_k - m_k) \mu(A_k) \leq \sum_{j=1}^n (M_j^* - m_j^*) \sum_{k: A_k \subset A_j^*} \mu(A_k) \leq \sum_{j=1}^n (M_j^* - m_j^*) \mu(A_j^*) =$$

$$= S_T^*(f) - S_T^*(f) < \varepsilon/2 \Rightarrow S_T(f) - S_T^*(f) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \text{ Все! :)} \\ \text{Далее смотрим 2-ой критерий}$$

м.к.м. в ее начале?)
БГГ.

Лекция 16

25.10.08

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА (обобщение)

f — простая функция

1. Аддитивность. Если $A = A_1 \cup A_2$, A_1, A_2 непересекаются, $\text{int } A_1 \cap \text{int } A_2 = \emptyset$
Тогда f интегрируема на $A \Leftrightarrow f$ интегрируема на A_1 и на A_2 . При этом

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A_1} f(x, y) dx dy + \iint_{A_2} f(x, y) dx dy$$

Если

2. Антиметричность. Если A, B измеримы, то f интегрируема на $A \Leftrightarrow f$ интегрируема на B .

Если

3. Антиметричность. Если A, B измеримы, $\mu(B) = 0$, f интегрируема на A , то $\iint_{A \cup B} f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy$

4. Антиметричность. Если f интегрируема на A , то $|f|$ интегрируема на A , причем

$$\left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy$$

5. Антиметричность. Если f, g интегрируемы на A , то $f+g$ интегрируема на A .

6. Антиметричность. Если f, g интегрируемы на A и $f(x, y) \leq g(x, y)$, $(x, y) \in A \Rightarrow \iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A g(x, y) dx dy$

СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОСТОЯННОМУ

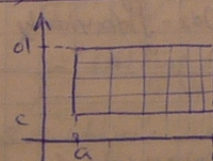
Теорема Пусть $R = [a, b] \times [c, d]$, f интегрируема на R и $\forall x \in [a, b]$

$$\exists \Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\text{тогда } \int_a^b \Phi(x) dx = \iint_R f(x, y) dx dy, \text{ м.к.}$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T$ — разбиение A $A_T < \delta \quad S_T(f) - S_T^*(f) < \varepsilon$



$$T_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$T_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

$$T: R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m R_{ij} \quad R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$\text{Если } d_{T_x} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, d_{T_y} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow d_T < \delta; M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f, m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f$$

$$S_T(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, S_T^*(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

$$S_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad 1 \leq i \leq n \quad y \in [y_{j-1}, y_j]$$

$$m_{ij} \leq f(s, y) \leq M_{ij} \quad (1) \text{ интегрируема по } [y_{j-1}, y_j]$$

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(s, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j \quad \text{— проинтегрируем по } 1 \leq j \leq m$$

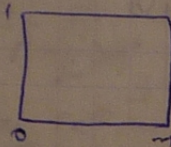
$$\sum_{j=1}^n m_j \Delta y_j \leq \int_C f(x,y) dy = \Phi(\xi_i) = \sum_{j=1}^n M_j \Delta y_j \quad \left| \begin{array}{l} \text{уменьш. на } \Delta x_i \text{ и увелич. на } \\ 1 \leq i \leq n \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n \Phi(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Rightarrow f(x,y) \in G_{\text{ex}}(\Phi, \xi_1, \dots, \xi_n) \subseteq S_f(f)$$

$$S_f(f) \subseteq I_f = I^* = \iint_R f(x,y) dx dy \leq S_f(A) \Rightarrow |G_{\text{ex}}(\Phi, \xi_1, \dots, \xi_n) - \iint_R f(x,y)| \leq S_f(A) - S_f(f) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \Phi(x) dx = \iint_R f(x,y) dx dy$$

Замечание Если f непрерывна на $R \Rightarrow \forall x \exists \int_a^b f(x,y) dy$



$$R = [0,1] \times [0,1]$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], y \in [0,1] \\ \delta(y), & x=0, y \in [0,1] \end{cases}$$

функция Дирака

f непрерывна на $\mathbb{R}$, т.е.

f огранич. в каждой точке разрыва имеет нуль.

$$\text{но } \int_a^b f(x,y) dy$$

$$R = \text{int } R \quad ([a,b] \times [c,d] = \overline{(a,b) \times (c,d)})$$

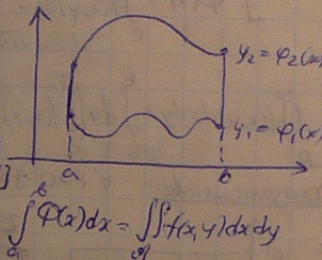
f непрерывна на $R \Rightarrow f$ ограничена на R .

Лемма 1' Если f непрерывна в $[a,b]$

и $\forall y \in [c,d]$

$$\exists \int_a^b f(x,y) dx = \varphi(y), \text{ то } \int_c^d \varphi(y) dy = \iint_R f(x,y) dx dy, \text{ т.е.}$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$$



Лемма 2 Пусть $A = \{a \leq x \leq b,$

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \quad \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$$

и непрерывно, f огранич. на A и непрерывна на A .

$$\text{Если } \forall x \in [a,b] \exists \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy, \text{ то } \int_a^b \varphi(x) dx = \iint_A f(x,y) dx dy$$

Замечание Если $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b] \Rightarrow A$ непрерывно

f непрерывна на $A \Rightarrow f$ огранич. на A , т.е. $A \subseteq \text{int } A$

Замечание A непрерывно $\Rightarrow A$ ограничено $\Rightarrow \exists c,d \cdot c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$

$$R = [a,b] \times [c,d] \quad F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in R \setminus A \end{cases}$$

$F(x,y)$ непрерывна на R по свойству аддитивности, т.е. f непрерывна на A , $P=0$ непрерывна на $R \setminus A$ и $\iint_R F(x,y) dx dy = \iint_A F(x,y) dx dy + \iint_{R \setminus A} F(x,y) dx dy = \iint_A f(x,y) dx dy$

$$= \iint_A f(x,y) dx dy$$

$$\forall x \in [a,b] \exists \int_c^d F(x,y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy = \varphi(x) \Rightarrow \text{по лемме 1.}$$

$$\iint_R F(x,y) dx dy \stackrel{T.1}{=} \int_a^b dx \int_c^d F(x,y) dy$$

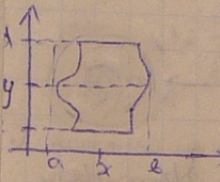
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Лемма 2' Пусть $A = \{c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}, \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y), y \in [c,d]$

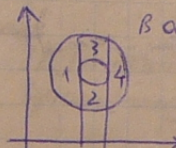
и непрерывно, f огранич. на A и непрерывна на A .

$$\text{Если } \forall y \in [c,d] \exists \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) dx, \text{ то}$$

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \iint_A f(x,y) dx dy$$



Замечание



В общем случае множество можно разбить на части и применить Т2, Т2'.

n -КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ($n \geq 3$)

$A \subset \mathbb{R}^n$

$$I_k \subset \{[a_k, b_k], (a_k, b_k), [a_k, b_k), (a_k, b_k]\} \quad 1 \leq k \leq n$$

$\Pi = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ - параллелепипед

$$\mu(\Pi) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) \quad \text{int } \Pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

Φ -мерная группа, если $\Phi = \bigcup_{j=1}^p \Pi_j, \text{ int } \Pi_i \cap \text{int } \Pi_j = \emptyset$

$$\mu(\Phi) = \sum_{j=1}^p \mu(\Pi_j)$$

это определение корректно

$$\mu^*(A) = \inf_{\Phi \supset A} \mu(\Phi), \quad \mu_*(A) = \sup_{\Phi \subset A} \mu(\Phi), \quad \mu^*(A) \geq \mu_*(A)$$

Опр. A называется измеримой, если $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. При этом

$$\mu(A) := \mu_*(A) = \mu^*(A)$$

СВОЙСТВА

1. A_1, A_2 измер. $\Rightarrow A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \setminus A_2$ измер.

2. $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, A_j$ измер. $\Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$

$$\text{если } \text{int } A_i \cap \text{int } A_j = \emptyset \quad (i \neq j), \text{ то } \mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Критерий измеримости

Ограниченное множество A измеримо $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0$

Построение n -кратного интеграла вводится аналогично

$$\int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad \int f d\mu, \quad \int f(x) dx$$

Сведение к повторному

1. $\mathbb{R}^{n+k}$ $x_1, \dots, x_{n+k}$

$$R \subset \mathbb{R}^{n+k} \quad R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n+k}, b_{n+k}] =$$

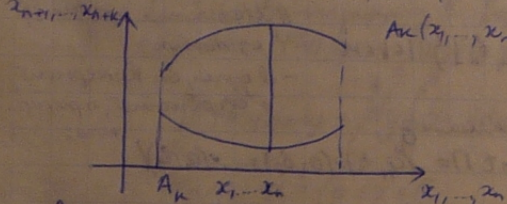
$$= \Pi_n \times \Pi_k, \quad \Pi_n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$\Pi_k = [a_{n+1}, b_{n+1}] \times \dots \times [a_{n+k}, b_{n+k}]$$

$$f \text{ интегр. на } \Pi_{n+k}; \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \Pi_n \quad \exists \int \dots \int_{\Pi_k} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) dx_{n+1} \dots dx_{n+k}$$

$$\text{Тогда } \exists \int \dots \int_{\Pi_n} dx_1 \dots dx_n \left(\int \dots \int_{\Pi_k} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) dx_{n+1} \dots dx_{n+k} \right) = \\ = \int \dots \int_{\Pi_{n+k}} f(x_1, \dots, x_{n+k}) dx_1 \dots dx_{n+k}.$$

Общий случай: $R \in \mathbb{R}^{n+k}$, $R = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \Pi_n; (x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \in A_k(x_1, \dots, x_n) \}$



$A_k(x_1, \dots, x_n)$

A_k измеримо в $\mathbb{R}^{n+k}$

A_k измеримо в $\mathbb{R}^n$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in A_n \quad A_k(x_1, \dots, x_n)$ измер. в $\mathbb{R}^k$

f интегр. на R и $\forall (x_1, \dots, x_n) \in A_n$

$$\exists \int \dots \int_{A_k(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) dx_{n+1} \dots dx_{n+k}$$

$$\text{Тогда } \int \dots \int_R f(x_1, \dots, x_{n+k}) dx_1 \dots dx_{n+k} = \int \dots \int_{A_n} dx_1 \dots dx_n \left(\int \dots \int_{A_k(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_{n+k}) dx_{n+1} \dots dx_{n+k} \right)$$

30.10.08. Лекция 17

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Область - открытое связное множество.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$

$$f: \begin{cases} x_1' = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n' = \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

1. φ взаимнооднозначна Ω на Ω' (т.е. является биекцией)

2. $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(\bar{\Omega})$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in C(\bar{\Omega})$ и продолжимся до непрерывных функций в $\bar{\Omega}$ (если функции неперр. в $\bar{\Omega}$ и совпадают с данными функциями на множестве Ω)

3. Ω, Ω' - измеримые области

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(x_1', \dots, x_n')}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

Пусть задана функция $f(x_1', \dots, x_n')$ интегр. в Ω'

тогда интеграл по области Ω'

$$\int_{\Omega'} f(x_1', \dots, x_n') dx_1' \dots dx_n' = \iint_{\Omega} f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)) |J(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n$$

J может = 0 на множестве меры ноль.

тогда интеграл

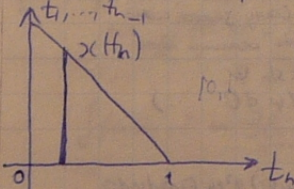
сравна $\exists$.

Примеры

1. $\Delta_n(x)$ - объем $\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq a \}$

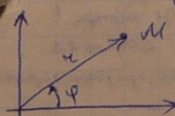
$$a > 0 \quad \text{сделаем замену } x_1 = at_1, \quad x_2 = at_2, \quad \dots, \quad x_n = at_n$$

$$\Delta_n(a) = \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega} a^n dt_1 \dots dt_n = a^n \Delta_n(1) \quad (1)$$



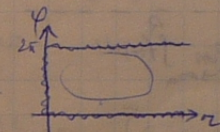
$$\Delta_n(1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta_1(1) = \frac{1}{n!} \Rightarrow \Delta_n(a) = \frac{a^n}{n!}$$

Полярные координаты



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

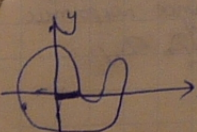
$$D(x, y) = r$$



Пусть Ω' - область на плоскости x, y , Ω' измеримо, $\Omega' \cap \{x \geq 0, y = 0\} = \emptyset$

$f(x, y)$ интегр. в Ω'

$$\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \quad (2)$$

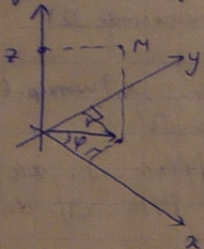


$$\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \quad (2)$$

в области Ω' не может быть

$$\iint_{D'} f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

Цилиндрические координаты

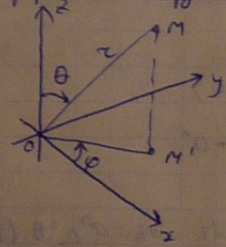


$$\begin{aligned} z &= z \\ x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$z=0$ - нет вращ. осн.
 $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ - " "

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{D_{xyz}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

Сферические координаты



$$\begin{aligned} \rho &= r \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \\ x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

$z \geq 0$ - нет вращ. осн.
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ - " "

r фиксиров. - сфера радиуса r
 φ фиксиров. - полукруг
 θ фиксиров. - конус



$$J = r^2 \sin \theta$$

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{D_{xyz}} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

В
140 саны закон света
В чине календаре лето
 $r^2 \sin \theta$
 $d\varphi d\theta dr$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(t) dt$$

// Належили похвалит.
- Потимконтале карьеры!
Дарина А.В.

Гониме, прогоним карьеры

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$D \subset \mathbb{R}^k$
открыт

$\{D_n\}$ назыв. исчерпанием D , если

- 1) D_n открыто, $n \in \mathbb{N}$
- 2) $D_n \subset D_{n+1}$
- 3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

$D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2\}$ - исчерпание
 $\mathbb{R}^2$

Если

Если $K \subset D$, K - компакт, то $\exists N: K \subset D_N: K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ - открытое покрытие компакта $\Rightarrow$ можно выделить конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{n=1}^N D_n = D_N$

Определение: Пусть функция f интегрируема на $\forall$ измеримом подмножестве области D . и $\exists I: \forall \{D_n\}$ - исчерп. послед-ти измеримых областей $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx = I$ (не зависит от выбора исчерпаний)

Случай $f \geq 0$ $\int_{D_n} f(x) dx$ неубыв. $\forall \{D_n\}$ - исчерп. посл-ти измеримых областей

Критерий интегрируемости неотрицат. функции:

Пусть f неотриц. в D , f интегрир. на $\forall$ измеримом подмножестве области D . Тогда f интегрир. в $D \Leftrightarrow \{D_n\}$ - исчерп. посл-ти измеримых множеств

$\int_{D_n} f(x) dx$ - ограничена

Док-во: Если f интегрир. $\Rightarrow \forall \{D_n\}$ исчерп. $\Rightarrow \int_{D_n} f(x) dx$ огранич.

$\Leftarrow$ Если $\int_{D_n} f(x) dx$ ограничена $\Rightarrow$ сходится (н.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx$)

$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) dx = I$, при этом $\int_{D_n} f(x) dx \leq I$, не $\forall$

Возврат $\forall \{D_n\}$ - группиров. посл-ти, $D_n' \subset D_{n+1}' \subset D \Rightarrow \exists N: D_n' \subset D_N \Rightarrow$ сходим. по теореме Лебеге, компакт

$\int_{D_n'} f(x) dx \leq I \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n'} f(x) dx = I' \leq I$. Не имея $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx = I$, получаем $I \leq I'$

Пример: $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ $D_n = \{x^2+y^2 \leq n^2\}$; $\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^n e^{-r^2} r dr = \pi (1 - e^{-n^2}) \rightarrow \pi$

$K_n = \{x^2+y^2 \leq n^2\}$ - исчерп. посл-ти $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$; $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Признак сравнения:

Пусть $0 \leq f \leq g$ в D (область), f, g интегрируемы на $\forall$ измеримом подмножестве области D . Тогда, если $\int_D g(x) dx$ сходится, то сход. $\int_D f(x) dx$.

Док-во: $\{D_n\}$ - исчерп. посл-ти $\Rightarrow \int_{D_n} f(x) dx \leq \int_{D_n} g(x) dx \Rightarrow$ в силу критерия

$\int_{D_n} g(x) dx$ ограничен $\Rightarrow \int_{D_n} f(x) dx$ ограничен $\Rightarrow \int_D f(x) dx$ сходится

1.11.08

Лекция 18

f интегр. на $\mathbb{D}$ измерим $\Leftrightarrow \mathbb{D} \in \mathcal{A}$, $\mathbb{D}$ измеримо $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \mathbb{D}$ интегр. на $\mathbb{D}$ измерим замкнуто подмнож. $\mathbb{D}$

Из определения несобств. интеграла следует

Линейность f_1, f_2 интегр. в $\mathbb{D}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{\mathbb{D}} (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dx =$
 $= \alpha \int_{\mathbb{D}} f_1(x) dx + \beta \int_{\mathbb{D}} f_2(x) dx$

Абсолютная сходимость

Оп. $\int_{\mathbb{D}} f(x) dx$ сходится абсолютно, если сходится $\int_{\mathbb{D}} |f(x)| dx$.

Лемма 1 Если $\int_{\mathbb{D}} |f(x)| dx$ сходится, то $\int_{\mathbb{D}} f(x) dx$ сходится.

Доказат-во:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \text{ интегр. на } \mathbb{D} \text{ замкнуто}$$

$$0 \leq f_+(x), f_-(x) \leq |f(x)|$$

$$f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$$

т.е. $\int_{\mathbb{D}} |f(x)| dx$ сходится $\Rightarrow \int_{\mathbb{D}} (f_+(x) - f_-(x)) dx = \int_{\mathbb{D}} f(x) dx$
 (т.е. $f_+(x) - f_-(x) = f(x)$)

Лемма 2 Если сходится $\int_{\mathbb{D}} f(x) dx$, то сходится $\int_{\mathbb{D}} |f(x)| dx$.

Доказ-во (от противного)

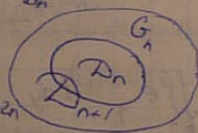
Предположим, что интеграл не сходится абсолютно $\Rightarrow \exists \{ \mathbb{D}_n \}$ - последовательность открытых измеримых множеств: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}_n} |f(x)| dx = \infty$

Тогда, если к ним прибавим $\int_{\mathbb{D}_n} f(x) dx > 2 \int_{\mathbb{D}_n} |f(x)| dx + 2n$

$$G_n \subseteq \mathbb{D}_{n+1} \cup \mathbb{D}_n, \quad \int_{G_n} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{D}_{n+1}} |f(x)| dx - \int_{\mathbb{D}_n} |f(x)| dx >$$

$$2n + 1$$

$$2 \int_{\mathbb{D}_n} |f(x)| dx + 2n$$



$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

Предположим, что $\int_{G_n} f_+(x) dx > \int_{G_n} f_-(x) dx$ (иначе $f \rightarrow -f$)

$$\int_{G_n} f_+(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_{G_n} |f(x)| dx > \int_{\mathbb{D}_n} f(x) dx + n$$

G_n^c

G_n - открытое мн-во.

$G_n = \text{int } G_n \Rightarrow f_+(x)$ - огранич. на G_n =
 предел. сумма Дарбу.

$$\exists T: G_n = \bigcup_{j=1}^n A_{nj}: S_T = \sum_{j=1}^n m_j \mu(A_{nj}) > \int_{\mathbb{D}_n} f(x) dx + n$$

(здесь $m_j = \inf_{A_{nj}} f(x)$)

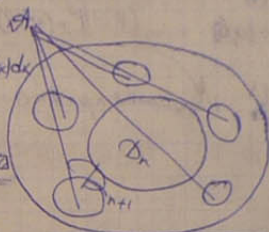
Если $m_j > 0$, то $f(x) = f_+(x)$, $x \in \Omega_{m_j}$, и тогда $\int_{\Omega_{m_j}} f(x) dx = \int_{\Omega_{m_j}} f_+(x) dx = m_j \cdot \mu(\Omega_{m_j})$

$$S_T = \sum_{j: m_j > 0} m_j \mathcal{A}_{m_j} \leq \sum_{j: m_j > 0} \int_{\mathcal{A}_{m_j}} f(x) dx \leq \int_{\mathcal{A}_n} f(x) dx$$

$\int_A f(x) dx = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \geq \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

$$\{ \square \} \succ \sim$$



$$\int_{a_n} f(x) dx \geq \int_{z_n} f(x) dx + n \quad \square$$

$\{\tilde{D}_n\}$ — изоморфизм (т.е. в $\tilde{D}_n$ — отображение 2. н. н. с. $\tilde{D}_n$ содержит $D_n, D_{n+1}, \dots, \tilde{D}_n$)

$$D_n \subset \tilde{D}_n \subset D_{n+1} \Rightarrow \tilde{D}_{n+1} \\ = \overline{D_n \cup D_{n+1}} \Rightarrow \overline{D_n} \cup \overline{D_{n+1}} \subset \overline{D_{n+1}}$$

3. $\Downarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D \Rightarrow$

Все обозначения
совпадает с D.)

(т.к. по-прежнему)

$U_{\max}$, не превосходит $U_{\max}$. $\{D_{2n}\}$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2n} f(x) dx = \infty$ Прямой предел существует
 $\int f(x) dx$
 не верно? $\exists$

Почему же в одних случаях такое неверно?

Т.к. там мы расст. не только по открыт. мн-ва, но и по пути.

- абсолютно раскодируется

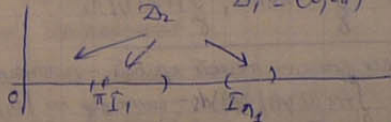
$$\int \frac{8x^2 \cdot x}{x^2} dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x} dx \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)} \sim \frac{1}{n}$$

$$\text{for } I_n = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right)$$

$$\sum_{I_n} \int \frac{\sin x}{x} dx - \text{parameter}$$

$$\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}, 2\sigma)$$



$$D_2: \int \frac{\sin x}{x} dx > 2$$

$$\mathcal{D}_1 \cup \Gamma_1 \cup I_{n_1} = \mathcal{D}_2$$

$$D_3 = (q\pi + i\pi n_1) \cup I_{n_1} + \dots + I_{n_2} \cup \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (в $\mathbb{R}^3$)

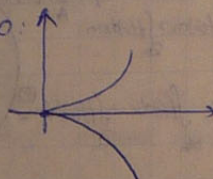
Кривая $\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \xi(t) \end{cases}$ Опред. γ является гладкой кривой, если
 1) $\varphi, \psi, \xi \in C^1[a, b]$;
 $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\xi'(t))^2 > 0, t \in [a, b]$

Пример

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$t \in [-1, 1]$$

нарушение при $t=0$



$$\begin{aligned} t &= \sqrt[3]{x} & t &= \sqrt[3]{y} \\ y &= x^{3/2} & x &= y^{2/3} \\ x^{3/2} &= y^{2/3} \Rightarrow y &= x^{3/2} \end{aligned}$$

Определение γ называется кусочно гладкой кривой, если $\exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ $\varphi, \psi, \xi \in C^1[t_j, t_{j+1}]$; $\gamma_j = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \xi(t) \end{cases}, t \in [t_j, t_{j+1}]$ - гладкая, $1 \leq j \leq k$

γ -гладкая кривая $s(t) = \int_a^t \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\xi'(t))^2} dt$ - длина дуги кривой

$$\begin{aligned} s(b) &= |I| - \text{длина кривой } \gamma, \quad c' [0, |I|] \\ s'(t) &= \sqrt{\dots} > 0, t \in [a, b], t = t(s) \end{aligned}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} > 0, s \in [a, |I|]$$

Пусть $f(x, y, z)$ определена на гладкой кривой γ , m -е определена $f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ определена $f(x(s), y(s), z(s)), s \in [a, |I|]$

$$\begin{aligned} x &= x(s) = \varphi(t(s)) \\ y &= y(s) = \psi(t(s)) \\ z &= z(s) = \xi(t(s)) \\ s &\in [a, |I|] \end{aligned}$$

Определение Если существует $\int_a^{|I|} f(x(s), y(s), z(s)) ds$, то этим интегралом назыв. криволинейный интеграл 1-го рода от f по кривой γ .

Обозначим $\int_{\gamma} f(x, y, z) ds, \int_{\gamma} f(z(s)) ds$

Физический смысл такой кривой - плотность f .

Пусть $f(x(s), y(s), z(s))$ - непрерывна на $[a, |I|]$. (непрер. $f \in C[a, |I|]$)
 Заметим переменную:

Зам. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации гладкой кривой.

Зак. во:

$$\gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad s \in [0, l]$$

$$\tilde{\gamma}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_0^l f(x(s), y(s), z(s)) ds = \int_0^1 f(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_0^1 f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Спр γ - кусочно-г. кривая, то $\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(x, y, z) ds$ - при условии, что γ непрерывна и интегрируема.

Замечание Для кривых интегрируемых 1-го рода справедливы все свойства, аддитивности. и т.д. - по свойствам, что и для односторонних интегралов.

7.11.08

Лекция 19

$$\gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad s \in [0, l]$$

$$\tau(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) - \text{касательный вектор в точке } s \in [0, l]$$

γ - гладкая кривая

$$|\tau(s)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1 \leftarrow \text{т.к. } s - \text{натур. параметр}$$

$$\vec{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \quad P, Q, R \text{ опред. на } \gamma$$

Векторное поле = векторная функция

Спр. $\int_{\gamma} (a, \tau) ds$ назыв. кривинт. интегралом 2-го рода от векторной функции $\vec{a}$ по γ .

Работа. Физический смысл - работа поля $\vec{a}$ по перемещению мат. точки вдоль γ .

Утв. При смене ориентации кривой интеграл 2-го рода меняет знак.

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \tau = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = - \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = -\tau(s)$$

$$s_1 = 0, s_2 = l \quad \vec{a}(x(s_1), y(s_1), z(s_1)) = (P(x(s_1), y(s_1), z(s_1)), Q(x(s_1), y(s_1), z(s_1)), R(x(s_1), y(s_1), z(s_1)))$$

$$\int_{\gamma} (a, \tau) ds = \int_{s_1}^{s_2} (a(s), \tau(s)) ds = - \int_{s_1}^{s_2} (a(s), \tau(s)) ds = - \int_0^l (a(s), \tau(s)) ds = - \int_0^l (a(s), \tau(s)) ds$$

$$P(x(s), y(s), z(s)) \cdot \frac{dx}{ds} + Q(x(s), y(s), z(s)) \cdot \frac{dy}{ds} + R(x(s), y(s), z(s)) \cdot \frac{dz}{ds}$$

Пусть P, Q, R непрерывны на J , т.е. $P(x(s), y(s), z(s)), Q(\dots), R(\dots) \in C([a, b])$

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_a^b (P(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \zeta'(t)) dt$$

$$\Rightarrow \gamma(s) = \gamma(t), \quad ds = \frac{ds}{dt} dt, \quad t \in [a, b]$$

$$\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

Утв. 2 Если P, Q, R непрерывны на J - гладкой кривой, то $\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_a^b (P(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \zeta'(t)) dt$

Замечание 1 $\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ (интеграл по кривой)

Замечание 2 Если γ - кусочно-гладкая кривая, то $\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$

Замечание 3 Если $\gamma = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$, γ_j - кусочно-гладкие кривые, то $\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$

Замечание 4 Если γ - замкнутая кривая, то $\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ назыв. циркуляцией вектора поля вдоль γ .

Замечание 5 Если γ - граница области D ($\gamma = \partial D$), γ - кусочно-гладкая кривая или объединение кусочно-гладких кривых, то считая вращ. так, что при обходе вдоль γ область D остается слева



$$\int_{\gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

$x^2 + y^2 = 1$
против часовой стрелки



$$x = \cos t, y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot (-\sin t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

ФОРМУЛА ГРИНА

Хорданова кусочно-гладкая кривая - замкнутая кусочно-гладкая кривая без самопересечений.
 $D \subset \mathbb{R}^2$ - область, ∂D состоит из конечн. числа неперекр. кусочно-гладких кривых. $P, Q \in C(\bar{D})$; $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ непрер. в D и имеет непрер. продолжение на $\bar{D}$.

тогда

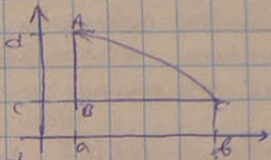
$$\int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

считая так, что область D остается слева.

Докажем это равенство с помощью

$$D = \Delta ABC$$

ΔABC — многок. область, $y = y(x)$,
строим область на $[a, b]$



$\int\limits_D f(x,y) dx dy$

$$x = x(y) \quad [a, b]$$

$$\int\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^{x(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) dx = \int_c^d dy (Q(x(y), y) - Q(a, y)) = \int_c^d Q(x(y), y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy$$

ΔABC многок. область $x = x(y)$,
 $y = y(x)$
 $a \leq x \leq b$

$$I_1 = \int_0^1 Q(x(t), y(t)) y'(t) dt = \int_{CA} Q(x,y) dy; \quad I_2 = - \int_{AB} Q(x,y) dy = - \int_a^b Q(x,y) dy$$

$$I = \oint_C Q(x,y) dy = \int_{CA} Q(x,y) dy + \int_{AB} Q(x,y) dy + \int_{BC} Q(x,y) dy = \int_{\partial D} Q(x,y) dy$$

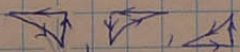
$$\text{Но } \int_{BC} Q(x,y) dy = 0 \quad y = c \text{ на } BC, dy = 0$$

$$\oint_C Q(x,y) dy = \int_{CA} Q(x,y) dy + \int_{AB} Q(x,y) dy + \int_{BC} Q(x,y) dy = \int_{\partial D} Q(x,y) dy$$

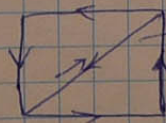
$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b dx \int_c^{y(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dy = - \int_a^b (P(x, y(x)) - P(x, c)) dx = \int_a^b P(x, y(x)) dx - \int_a^b P(x, c) dx$$

$$= \int_{BC} P(x,y) dx - \int_{AC} P(x,y) dx + 0 = \int_{BC} P(x,y) dx + \int_{BA} P(x,y) dx + \int_{AC} P(x,y) dx = \int_{\partial D} P(x,y) dx$$

Далее

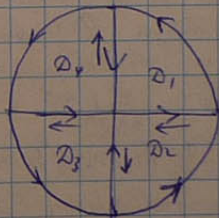


Формула Грина справедлива и для области, как можно разрезать на конечное число, криволинейных треугольников.



интер. по обеим частям. Сопрем.

$$\oint P dx + Q dy = \sum_{j=1}^n \oint P dx + Q dy = \sum_{j=1}^n \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



$$Q = x, P = 0 \quad \oint_{\partial D} x dy = \iint_D 1 dx dy = \mu(D)$$

$$\oint_{\partial D} (1 - x) dx = \iint_D (1 - x) dx dy = \mu(D) - \mu(D) = 0$$

$$\oint_{\partial D} x dy = \iint_D y dx dy = \mu(D) - \mu(D) = 0$$

Понятие поверхности

Опр. $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ называется простой поверхностью, если Φ есть график (f, g, h) функции над областью D в одной из координатных плоскостей.

$$\text{т.е. } \Phi = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \quad f \in C^1(D)$$

$$\text{или } \Phi = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, x = f(y, z)\} \quad f \in C^1(D)$$

$$\Phi = \{(x, y, z) : (z, x) \in D, y = f(z, x)\}, \quad f \in C^1(D)$$

Лекция 20 8.11.08

$M \in \mathbb{R}^3$: окрестность точки M называется любое открытое множество в $\mathbb{R}^3$, содержащее M .

Связное множество $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ называется гладкой поверхностью, если $\forall M \in \Phi \exists U_M$ (окрестность точки M) такая, что $\Phi \cap U_M$ является простой поверхностью. Из определения следует, что простая поверхность является гладкой. ($\forall M U_M = \mathbb{R}^3$)

Пример $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ сфера

Покажем, что S - гладкая поверхность.

$\forall M \in S : M(x_0, y_0, z_0)$ - хотя бы одна из координат отлична от нуля (пусть это x_0)

$$x_0 > 0 \Rightarrow U_M = \{(x, y, z) : x > 0\}$$

$$S \cap U_M = \{(x, y, z) : x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}\} \quad \text{прямая поверхность} \quad \text{плоская область } D$$

$$\Rightarrow f(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \in C^1(D)$$

$$x_0 < 0 \Rightarrow U_M = \{(x, y, z) : x < 0\}$$

Но S не является простой поверхностью, т.к. не проектируется однозначно ни на одну из координатных плоскостей.

Пример: поверхности уровня

Ω - область в $\mathbb{R}^2$

$$\Phi = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, F(x, y, z) = 0\}, \text{ где } F(x, y, z) \in C^1(\Omega)$$

$$\text{grad } F|_{\Phi} \neq 0, \Phi \text{ связна } (\text{grad } F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}))$$

тогда Φ гладкая поверхность

Доказ. $\forall M(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$

Пусть $\frac{\partial F}{\partial z}|_M \neq 0$. По теореме о неявной функции

$$\exists \delta > 0 : \Phi \cap \{|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, |z - z_0| < \delta\} = \{(x, y, z) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, z = f(x, y)\}, \text{ где}$$

$$f \in C^1(|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta)$$

(сфера - частный случай поверхности уровня)

Пример: параметрически заданная поверхность

$$\Sigma = \Sigma(u, v) \quad (\text{т.е. } \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases})$$

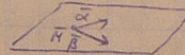
отображение

Пусть: 1) Ω - плоская область; $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и их частные производные непрерывны в Ω

2) отображение Σ инъективно в $\bar{\Omega}$ (т.е. если $(u, v) \neq (u', v')$, то

$$\Sigma(u, v) \neq \Sigma(u', v')$$

$$3) \forall (u, v) \in \Omega \quad \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial u}, \frac{\partial \Sigma}{\partial v} \right] \neq 0$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (\text{плоскость})$$

$$\Rightarrow 1) x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^0(\Omega)$$

$$2) \alpha, \beta \text{ линейно независимы} \Rightarrow \text{отображение инъективно}$$

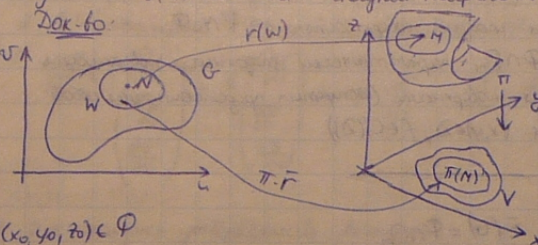
$$3) \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \alpha$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \beta \quad [\alpha, \beta] \neq 0$$

Теорема Пусть отображение Σ удовлетворяет условиям (1, 2, 3).

Тогда $\Phi = \Sigma(\Omega)$ является гладкой поверхностью.

Доказ.



$$\forall M(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$$

$$\text{из условия 1) } \exists ! N(u_0, v_0) \in \Omega : \Sigma(N) = M$$

из условия 2) хотя бы одна из главных миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ отлична от нуля}$$

Предположим для определенности, что это $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}|_N \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \text{ можно разрешить в окрестности точки } N$$

$$\pi : (x, y, z) \mapsto (x, y) \quad (\text{проектирование})$$

$$\pi(M) = (x_0, y_0)$$

$$\pi^{-1}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

$\exists N$: окрестности точки N ($W \subset \Omega$, W - открытое множество).

$\exists V$ - окрестности точки $\pi(M)$:

π^{-1} является диффеоморфизмом области W на область V

(т.е. $\exists$ обратная отображение $(\pi^{-1})^{-1} : (x, y) \mapsto (u, v), (v, u)$ ($V \rightarrow W$);

$u(x, y), v(x, y)$ непрерывны вместе (частичные производные в V)

$$z(u) = \{(x, y, z) : (x, y) = (x(u, v), y(u, v)), z = z(u, v), (u, v) \in W\} \Leftrightarrow \{(x, y, z) : (x, y) \in V, z = z(u(x, y), v(x, y))\}$$

$$z = f(x, y) - \text{непрерывна}$$

вместе (частичные производные)

Остаток правильно выбрать окрестность точки M .

$$\Omega$$
-область: $\Sigma \cap V, \pi(M) \in \Omega$

$$\text{Докажем: } \exists \delta > 0 : \Phi \cap \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, |z - f(x, y)| < \delta\} = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$$

Предположим противное:

$$\exists \frac{1}{n} \Rightarrow \exists (x_n, y_n, z_n) = M_n : (x_n, y_n) \in \Omega, |z_n - f(x_n, y_n)| < \frac{1}{n}, z_n \neq f(x_n, y_n) \quad (M_n - \text{лишняя точка})$$

$$\exists ! N_n : M_n = \Sigma(N_n), N_n \in \Omega \cap N \quad (\text{т.к. } \forall W \exists z = f(x, y) / N_n(u_n, v_n))$$

$\bar{G}$ ограничено $\Rightarrow \{N_n\}$ - ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists \{N_{n_k}\}$ - сходящаяся последовательность: $N_{n_k} \rightarrow N'(u', v')$; $N' \in \bar{G} \cap W = \bar{G} \cap W$

$\bar{z}$ непрерывно в $\bar{G} \Rightarrow (x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}) = \bar{r}(u_{n_k}, v_{n_k}) \rightarrow \bar{r}(u', v') = (x', y', z') = M'$

т.к. $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in D \Rightarrow (x', y') \in \bar{D} \subset V$

$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(x', y') \Rightarrow z' = f(x', y')$

Таким образом, $M' \in F(W)$, но $N' \notin (W)$

$\bar{r}(N')$

$\Rightarrow M'$ является образом некоторой точки из $W \Rightarrow$ противоречие с инъективностью $\bar{r}$ в $\bar{G}$

Замечание: параметрически заданная поверхность связна, т.к. G - связное множество (область)...

теорема

Связное множество Φ является гладкой поверхностью $\Leftrightarrow \forall M \in \Phi$

$\exists O_M$ - окрестность точки M : $\Phi \cap O_M$ - параметрически заданная поверхность

Док-во: $\Rightarrow$ Пусть Φ - гладкая поверхность (допустим, представляющая собой график функции $z = f(x, y)$ для $(x, y) \in D$, $f \in C^1(D)$)

$\forall G: M \in G, \bar{G} \subset D$

$O_M = U_M \cap \{(x, y, z) / (x, y) \in G\}$

отображение $r: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$

$\bar{r}(G) = \Phi \cap O_M$

$(u, v), (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in G \Rightarrow$ условия (1) выполнены

Если $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \Rightarrow \bar{r}(u_1, v_1) \neq \bar{r}(u_2, v_2) \Rightarrow$ (2) выполнено

$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ условие (3) выполнено

$\Leftarrow$ т.к. параметрически заданная поверхность гладкая $\Rightarrow$ верно

($\forall M \in \Phi \cap O_M \exists U_M: (\Phi \cap O_M) \cap U_M = \Phi \cap (U_M \cap U_M)$ - простая поверхность)

Утв. Пусть Φ - параметрически заданная поверхность (в декартовых координатах x, y, z)

Тогда в любой декарт. системе координат Φ - тоже параметрически заданная поверхность

Док-во: $\Phi: \bar{z} = \bar{z}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, (u, v) \in G$ отображение $\bar{r}$ инъективно в G' и непрерывно т. пр. с G - метрич. топ. $\Rightarrow$ $\bar{r}$ - гомеоморфизм

$\exists O_{x'y'z'}$ - другая декарт. с.к. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \bar{b}$ A - невыр. матрица, $\bar{b}$ - вектор

В координатах x', y', z' $\bar{z}' = \bar{z}'(u, v) = \begin{pmatrix} x'(u, v) \\ y'(u, v) \\ z'(u, v) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} + \bar{b} = A \bar{z}(u, v) + \bar{b} = \bar{z}'(u, v)$ $\Phi = \bar{z}'(G)$

1. $\bar{z}'$ непрерывно в G' и имеет непрерывные частные производные в G'

2. $\bar{z}'$ инъективно в G' , т.к. $\bar{z}$ инъективно в G , A - невыр. матрица

3. $\frac{\partial \bar{z}'}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial u} \\ \frac{\partial y'}{\partial u} \\ \frac{\partial z'}{\partial u} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = A \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial \bar{z}'}{\partial u} = A \frac{\partial \bar{z}}{\partial u}$ т.к. A невырожд., $\frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{z}'}{\partial u} \neq 0$ $\wedge \frac{\partial \bar{z}'}{\partial v} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{z}'}{\partial u}, \frac{\partial \bar{z}'}{\partial v} \wedge \bar{z}' - \text{ЛНЗ}$

Из 2-х последних утверждений вытекают

Следствие. Если Φ - гладкая поверхность (относительно декарт. с.к. $Oxyz$), то Φ является гладкой поверхностью в любой декарт. с.к.

Док-во: $\forall M \in \Phi \exists O_M: \Phi \cap O_M$ - парам. зад. пов-ть (относительно декарт. координат $O_M x'y'z'$)

$\Rightarrow \Phi \cap O_M$ - параметр. заданная пов-ть в любой декарт. с.к. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ - гладкая поверхность в любой с.к.

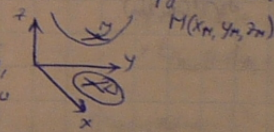
Понятие касательной плоскости

Φ - гладкая поверхность, $M \in \Phi \Rightarrow$ существует декарт. система координат $O_M x'y'z'$ $\Phi \cap U_M = \{ (x, y, z) / z = f(x, y), f \in C^1(D) \}$

$f_1: \begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = f(t, u) \end{cases}$

$f_2: \begin{cases} x = x_M \\ y = t \\ z = f(x_M, t) \end{cases}$

f_1, f_2 - гладкие кривые, принадлежащие Φ и проходящие чрез M .



$T_1(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_M, y_M)}), T_2(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_M, y_M)})$ - н.к. векторы f_1 и f_2 в точке M . Они ЛНЗ

Покажем, что для любой гладкой кривой f , принадлежащей Φ и проходящей чрез M касат. вектор в точке M является линейной комбинацией T_1 и T_2 .

f - гладкая, $f \subset \Phi$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases} \quad M = (x(t_M), y(t_M), z(t_M))$

τ - касательный вектор к Γ в точке M .

$$\tau = (x'(t_n), y'(t_n), \frac{df}{dx}\bigg|_{(x_n, y_n)} + \frac{df}{dy}\bigg|_{(x_n, y_n)} y'(t_n)) = x'(t_n) \bar{e}_1 + y'(t_n) \bar{e}_2$$

Утверждение Существует единств. плоскость, проходящая через M и содержащая касат. вектор к гладкой кривой, проходящей через M и лежащей в Φ . Эта плоскость называется касательной к Φ в точке M и обозн. $T_M(\Phi)$

Зам-ба Для задания $T_M(\Phi)$ нужно знать M и $n(M)$ - единичн. нормаль к плоскости.

1) Φ - простая поверхность $z = f(x, y), (x, y) \in D$

$$n_2(M) = \frac{[-f_x, -f_y]}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad n_2(M) = -n_1(M)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{df}{dx} \\ 0 & 1 & \frac{df}{dy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad n_1(M) = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{df}{dx} & -\frac{df}{dy} & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + (\frac{df}{dx})^2 + (\frac{df}{dy})^2}} \bigg|_{(x_n, y_n)}$$

$$z - z_n = \frac{df}{dx}\bigg|_{(x_n, y_n)} (x - x_n) + \frac{df}{dy}\bigg|_{(x_n, y_n)} (y - y_n) - \text{уравнение } T_M(\Phi)$$

2) Φ - поверхность уравн. $F(x, y, z) = 0$. Если $M \in \Phi$ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

$$\frac{dF}{dx}\bigg|_M \cdot x'(t) + \frac{dF}{dy}\bigg|_M \cdot y'(t) + \frac{dF}{dz}\bigg|_M \cdot z'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}_1(M) = \frac{\text{grad } F|_M}{|\text{grad } F|_M}, \quad \bar{n}_1(M) = -\bar{n}_2(M)$$

Параметрически заданная пов-ть

$$z = z(u, v) \quad M = z(u_n, v_n)$$

$$f_1: \bar{z} = \bar{z}(t, v_n)$$

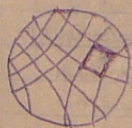
$$f_2: \bar{z} = \bar{z}(u_n, t)$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial u}\bigg|_{(u_n, v_n)} \quad \text{линейная независимы} \Rightarrow \bar{n}_1(M) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} \end{bmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}}$$

Определение Φ называется ОРИЕНТИРОВАННОЙ если на Φ существует непрерывное поле норм. единичн. длины (или двухсторонней)

Из (1), (2), (3) $\Rightarrow$ простая поверхность, поверхность уравн., парам. заданная пов-ть. Не ориент. пов-ть - поверхность Лобачевского.



"кашутка"

Лемма Пусть Φ - гладкая поверхность. Тогда $\forall M \in \Phi \exists V_M$ - окрестность точки M такая, что $\Phi_M = \Phi \cap V_M$ удовлетв.

а) на Φ_M существует непрерывное поле единичн. нормалей, притом $\forall P_1, P_2 \in \Phi_M \quad \angle(P_1), \angle(P_2) < \frac{\pi}{2}$.

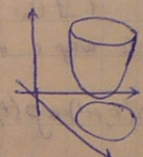
б) Φ_M однозначно проектир. на $T_P(\Phi) \quad \forall P \in \Phi_M$.

Док-во Без ограничения общности $\exists U_M$ - окр-ть точки $M(x_n, y_n, z_n)$:

$$\Phi \cap U_M = \{z = f(x, y), (x, y) \in D\} \quad f \in C(D) \text{ по формуле (1)}$$

$\bar{n}(M) = \bar{n}_1(M)$ - непрер. поле нормалей $\Rightarrow \exists B$ - открытый круг с центром $(x_n, y_n), B \subset D \quad \forall P(x, y, z): (x, y) \in B, z = f(x, y)$

$$\bar{n}(M), \bar{n}(P) < \frac{\pi}{4}$$



$$V_M = U_M \cap \{z = f(x, y), (x, y) \in B\}$$

$$\Phi_M = \Phi \cap V_M = \{z = f(x, y), (x, y) \in B\}$$

$$\forall P_1, P_2 \in \Phi_M \Rightarrow \angle(P_1) \angle(P_2) \leq \angle(P_1) \angle(P_2) \quad \angle(P_1) \angle(P_2) < \frac{\pi}{2}$$

т.к. угол между $\forall$ 2-мя нормальми $< \frac{\pi}{2}$.

Покажем, что выполнено условие б):

Предположим противное: $\exists P \in \Phi_M, \exists M_1, M_2 \in \Phi_M: M_1 \text{ и } M_2 \text{ проектируются в одну и ту же точку касательной плоскости } T_P(\Phi)$

$\overline{M_1 M_2} \parallel \bar{n}(P)$. Проведем через M_1 и M_2 плоскость,

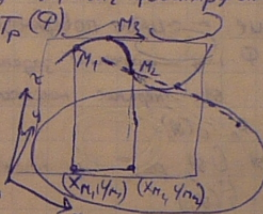
// σ . Эта плоскость пересекет Φ по кривой γ :

$$x = (1-t)x_n + tx_{M_1}$$

$$y = (1-t)y_n + ty_{M_2}$$

$$z = f(x, y)$$

γ - гладкая кривая



По формуле Лагранжа $\exists \xi \in (0, 1): \tau(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi)) \parallel \overline{M_1 M_2} \Rightarrow$ // теорема Лагранжа

$$f(x_{M_2}, y_{M_2}) - f(x_{M_1}, y_{M_1}) = \frac{df}{dx}\bigg|_{t=\xi} (x_{M_2} - x_{M_1}) + \frac{df}{dy}\bigg|_{t=\xi} (y_{M_2} - y_{M_1})$$

$$\tau(\xi) = \begin{pmatrix} x_{M_2} - x_{M_1} \\ y_{M_2} - y_{M_1} \\ \frac{df}{dx}\bigg|_{t=\xi} (x_{M_2} - x_{M_1}) + \frac{df}{dy}\bigg|_{t=\xi} (y_{M_2} - y_{M_1}) \end{pmatrix} = \overline{M_1 M_2} = \begin{pmatrix} x_{M_2} - x_{M_1} \\ y_{M_2} - y_{M_1} \\ z_{M_2} - z_{M_1} \end{pmatrix} = f(x_{M_2}, y_{M_2}) - f(x_{M_1}, y_{M_1})$$

$$\Leftrightarrow \tau(\xi) \parallel \bar{n}(P)$$

$$M_3 = f(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi)) \Rightarrow \bar{n}(M_3) \perp \bar{n}(P) \text{ противоречие а).}$$

Лемма 2 Пусть β -гладкая поверхность, $K \in \mathcal{S}$ (K -компактное множество). Тогда $\exists d > 0: \forall Q \in K \text{ diam } Q < d, \exists M, U_M$, удовлетворяющие условиям леммы 1 и $Q \subset U_M$.

Доказ-во: (от противного) $d = \frac{1}{n}: \exists Q_n \in K \text{ diam } Q_n < \frac{1}{n}$,

$\forall M, U_M$, удовлетворяющим условиям леммы 1 $Q_n \not\subset U_M, M_n \in Q_n$.

П.к. $\{M_n\}$ последовательность точек компакта K , то существует сходящаяся подпоследовательность $M_{n_k} \rightarrow M' \in K \subset S$

$\Rightarrow$ по лемме 1 $\exists U_{M'}$, удовлетворяющая условиям леммы 1 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$:

B_n -открытый шар с центром в точке M радиуса ε содержится в $U_{M'}$.

$$\forall P \in Q_{n_k} \rho(P, M') \leq \rho(P, M_{n_k}) + \rho(M_{n_k}, M') \leq \frac{1}{n_k} + \rho(M_{n_k}, M') \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \rho(P, M') < \varepsilon$ при достаточно больших k

$\Rightarrow Q_{n_k} \subset B_n$ при достаточно больших k

$\Rightarrow Q_{n_k} \subset U_{M'}$ - противоречие (мы предположили, что никакая окрестность $U_{M'}$ не содержит Q_{n_k})

Понятие площади поверхности

Рассмотрим Φ -параметрически заданную поверхность ($P = \Phi(G)$)

Рассмотрим A -измеримое множество: $A \subset G$.

Пусть $P_A = \Phi(A)$.

$\Gamma: A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ - разбиение множества A

$$P_A = \bigcup_{j=1}^n P_j, P_j = \Phi(A_j)$$

Φ непрерывно в $\bar{G} \Rightarrow \Phi$ равномерно непрерывно в $\bar{G}$, т.е. $\exists \delta > 0: \forall M_1, M_2 \in \bar{G}$:

$$\rho(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow \rho(\Phi(M_1), \Phi(M_2)) < \frac{d}{2}, \text{ где } d > 0 \text{ удовлетворяет лемме 2 для } K = \bar{P}$$

Таким образом, если $d_j < \delta \Rightarrow \text{diam } P_j \leq \frac{d}{2}$.

По лемме 1 $\forall P_j \in P_j$ множество P_j однозначно проектируется на $T_{P_j}(P)$ (касательная плоскость)

Обозначим P_j проекцию P_j на $T_{P_j}(P)$; $P_j = \Phi_j(A_j)$

Лемма 3 P_j измеримо и $\mu(P_j) = \iint_{A_j} (n(u, v), n(u, v_j)) \cdot \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| du dv$, где n -нормаль из леммы 1.

Доказ-во: фиксируем $j \in \overline{1, n}$

Возьмем декартову систему координат $Ox'y'z'$, где $Ox' = P_j$, Ox' сонаправлена с нормалью $\bar{n}(P_j)$

В этой системе координат $n(P_j) = (0, 0, 1)$.

П.к. $\cos(n(u, v_j), n(u, v)) > 0$ по лемме 1, то

$$\frac{D(x', y')}{D(u, v)} = \cos(n(u, v_j), n(u, v)) \Rightarrow \frac{D(x', y')}{D(u, v)} > 0 \text{ в некоторой окрестности } A_j.$$

$\Rightarrow$ существует взаимно-однозначное отображение $(u, v) \rightarrow (x', y')$ в некоторой окрестности A_j ; x', y' непрерывны вместе с производными в некоторой окрестности A_j и $\frac{D(x', y')}{D(u, v)} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ справедлива формула замены переменных в двойном интеграле, т.е.

P_j измеримо, причем

$$\mu(P_j) = \iint_{A_j} dx' dy' = \iint_{A_j} \frac{D(x', y')}{D(u, v)} du dv = \iint_{A_j} (n(u, v), n(u, v_j)) \cdot \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| du dv$$

$$\left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| = \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right|$$

Лемма 4 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: \text{diam } T < \min(\delta, \delta_0) / \text{где если } \text{diam } T < \delta_0$, то $\text{diam } P_j \leq \frac{d}{2} \mid \left| \sum_{j=1}^n \mu(P_j) - \iint_A \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| du dv \right| < \varepsilon$

Доказ-во:

$n(u, v)$ непрерывно на G (по формуле) $\Rightarrow n(u, v)$ равномерно непрерывно на $\bar{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(s), \forall s \leq \delta(s)$

$$\forall (u', v'), (u'', v'') : \rho((u', v'), (u'', v'')) < \delta(s)$$

$$\Rightarrow |n(u', v') - n(u'', v'')| < \sqrt{\frac{2\varepsilon}{I}}, \text{ где } I = \iint_A \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| du dv$$

(если $I = 0$, то $\mu(A) = 0$ и $\forall j = 1 \dots n \mu(A_j) = 0$)

$$T: d_j < \delta(s), (u, v) \in A_j$$

$$|n(u, v) - n(u, v_j)| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{I}}$$

$$(n(u, v) - n(u, v_j), n(u, v) - n(u, v_j)) = 2 - (n(u, v), n(u, v_j))$$

$$(n(u, v), n(u, v_j)) > 1 - \frac{\varepsilon}{I}$$

$$I - \sum_{j=1}^n \mu(P_j) = \sum_{j=1}^n \iint_{A_j} \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| (1 - (n(u, v), n(u, v_j))) du dv < \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{I} \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| du dv =$$

$$= \frac{\varepsilon}{I} \iint_A \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| du dv = \varepsilon$$

Пусть Φ -параметрически заданная поверхность, $P = \Phi(G)$, $A \subset G$ и A -измеримое множество. Тогда площадь участка $P_A = \Phi(A)$ называется

$$\iint_A \left| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right| du dv$$

Из леммы площадь поверхности равна пределу $\sum_{j=1}^n \mu(P_j)$ при $d_j \rightarrow 0$

Покажем корректность определения:

Пусть $\Phi = \Sigma(G) = \bar{R}(D)$

(u, v) - координаты в G , (s, t) - координаты в D

$\lambda: \begin{cases} s = s(u, v) \\ t = t(u, v) \end{cases}$ - является диффеоморфизмом $G \rightarrow D$, $\frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} \neq 0$; $B = \lambda(A)$

Нужно показать: $\iint_A \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| du dv = \iint_B \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right] \right| ds dt$

По формуле замены переменных в интеграле B запишем,

$$\iint_B \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right] \right| ds dt = \iint_A \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right] \right| \left| \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_A \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| du dv$$

$\bar{r}(u, v) = \bar{R}(s(u, v), t(u, v))$

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v}$

$\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] = \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} \right] = \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \right] \cdot \left| \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} \right|$

Замечание $\left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| \cdot \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \cdot \sin \alpha = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| \cdot \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2} = \sqrt{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|^2 - \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right)^2}$

Замечание если $\Phi = \bar{r}(G)$ - параметрически заданная поверхность и существует

$\iint_G \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| du dv$ - он называется площадью поверхности.

В общем случае, если Φ - компакт, Φ - гладкая поверхность, то ее можно разбить на конечное число участков (непересекающихся) параметрически заданных поверхностей $\Phi_1, \dots, \Phi_n$, $\mu(\Phi) = \sum_{i=1}^n \mu(\Phi_i)$

20.11.08 лекция 23

Замечание Если $\Phi = \{ (x, y, z), z = f(x, y), (x, y) \in D \}$, $A \subset D$, A измеримо

$\Phi_A = \{ z = f(x, y) | (x, y) \in A \}$

По формуле $\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right] = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \Rightarrow \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right] \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$
 $\sigma(\Phi_A) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy$

Определение $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n$ называется кусочно-гладкой поверхностью, если

при $j = 1, 2, \dots, n$ Φ_j является параметрически заданной поверхностью

$\Phi_j = \bar{r}_j(A_j)$

$\Phi_j \cap \Phi_k$ или пусто, или состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых

$x = x_j(u, v)$

$y = y_j(u, v)$ $(u, v) \in G_j$ - параметр. зад. пов. т.и.

$z = z_j(u, v)$ $A_j \subset G_j$, A_j измеримо

$\sigma(\Phi) = \sum_{j=1}^n \sigma(\Phi_j)$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

$\Phi = \bar{r}(A)$ $(u, v) \in G$ - параметрически заданная поверхность

$\Phi_A = \bar{r}(A)$, где $A \subset G$, A - измеримо; $F(x, y, z)$ определена на Φ_A , т.е.

$F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ - функция, определенная на A

Берем произв. множество Φ_A



$\Phi: A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, A_j измеримо, $A_j \cap A_k = \emptyset$, $i \neq j$

$\forall \Phi_j$ имеет площадь $\sigma(\Phi_j) = \iint_{A_j} \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| du dv$

Возьмем набор точек $P_i \in \Phi_j$

интегральная сумма $\sigma_T(F, P_1, \dots, P_n) = \sum_{j=1}^n F(P_j) \sigma(\Phi_j)$

Определение

Если $\exists I: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta, \forall P_1, \dots, P_n \in \Phi_T(F, P_1, \dots, P_n) - I < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \iint_{\Phi_A} F(x, y, z) d\sigma = I$

Φ_A

Покажем, что если F - непрерывна, интеграл $\exists$

Зам. Если $F(x, y, z)$ непрерывна на Φ_A (т.е. $F(\bar{r}(u, v)) \in C(A)$) и A - замкнутое измеримое

множество на множестве значений параметров (т.е. $A \subset G$), то $\exists \iint_{\Phi_A} F(x, y, z) d\sigma = \iint_A F(\bar{r}(u, v)) \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| du dv$

Док-во интеграл в правой части Φ_A $\exists$ как интеграл от непрерывной функции.

Если $\sigma(\Phi_A) = 0$, то $\iint_A \left| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right| du dv = 0$, то $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A') = 0 \Rightarrow \mu(\Phi_A) = 0 \Rightarrow \sigma(\Phi_A) = 0$

Пусть $\sigma(\Phi_A) > 0$.

Возьмем на Φ_A произв. замкнутое.

$F(\bar{r}(u, v))$ - функция, непрерывная на компакте $A \Rightarrow F(\bar{r}(u, v))$ равномерно

непрерывна на компакте $A \Rightarrow \exists \delta: \forall N', N'' \in A: \rho(N', N'') < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |F(\bar{r}(N')) - F(\bar{r}(N''))| < \frac{\varepsilon}{\sigma(\Phi_A)}$

возьмем разбиение $T: \Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta_j \in \mathcal{T} \Rightarrow A_j = \{z(u, v), (u, v) \in \Delta_j\}$

$$\left| \sigma_T(F, A_1, \dots, A_n) - \iint_A F(z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv \right| = \left| \sum_{j=1}^n \iint_{\Delta_j} F(z(u, v)) \cdot \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv - \sum_{j=1}^n \iint_{\Delta_j} F(z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \iint_{\Delta_j} |F(z(u, v)) - F(u, v)| \cdot \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv < \frac{\varepsilon}{\sigma(\Phi_A)} \left(\sum_{j=1}^n \iint_{\Delta_j} \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv \right) = \varepsilon$$

т.к. $\text{diam } \Delta_j < \delta$

$$= \sum_{j=1}^n \iint_{\Delta_j} |F(z(u, v)) - F(u, v)| \cdot \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv = \varepsilon, \text{ т.е.}$$

Замечание Теорема остается справедливой, если $\bar{A} \subset G$, A внутренне, $F(z(u, v)) \in C(A)$

$$\Rightarrow \iint_A F(x, y, z) d\sigma = \iint_A F(z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv$$

Покажем, что интеграл не зависит от параметризации.

Проверка корректности определений

Покажем, что интеграл в правой части (*) не зависит от параметризации, т.е.

$$\begin{aligned} \bar{G} &= z(u, v), (u, v) \in G \\ R &= R(s, t), (s, t) \in D \end{aligned}$$

$\Phi = z(\bar{G}) = R(\bar{D})$, $\bar{A} \subset \bar{G}$, $\bar{B} \subset \bar{D}$, A внутренне, $\lambda: (u, v) \rightarrow (s, t)$ является диффеоморфизмом G на D

$$\left| \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0 \text{ в } G, F(z(u, v)) \in C(G),$$

$$\iint_A F(z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv = \iint_B F(R(s, t)) \left| \left[\frac{\partial R}{\partial s}, \frac{\partial R}{\partial t} \right] \right| ds dt$$

то $F(R(s, t)) \in C(D)$, т.к. $F(z(\lambda^{-1}(s, t)))$

как суперпозиция непрерывных ф-х / B - внутренне (это автоматически вытекает)

Покажем, что $\iint_A F(z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv = \iint_B F(R(s, t)) \left| \left[\frac{\partial R}{\partial s}, \frac{\partial R}{\partial t} \right] \right| ds dt$

$\iint_A F(z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv = \iint_B F(R(s, t)) \left| \left[\frac{\partial R}{\partial s}, \frac{\partial R}{\partial t} \right] \right| ds dt$

Формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_B F(R(s, t)) \left| \left[\frac{\partial R}{\partial s}, \frac{\partial R}{\partial t} \right] \right| ds dt = \iint_A F(z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| du dv$$

т.к. $\left| \left[\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right] \right| = \left| \left[\frac{\partial R}{\partial s}, \frac{\partial R}{\partial t} \right] \right| \cdot \left| \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} \right|$

Площадь поверхности и поверхностный интеграл первого рода не зависят от выбора декартовых координат (длина векторного произведения не меняется).

Поверхностный интеграл 1-го рода не зависит от направления нормали к параметр. заданной поверхности.

Если $\Phi = \bigcup_{j=1}^n \Phi_j$ - кусочно-гладкая (или гладкая компактная пов-ть), то

$$\iint_{\Phi} F(x, y, z) d\sigma = \sum_{j=1}^n \iint_{\Phi_j} F(x, y, z) d\sigma, \text{ если } \forall j \in 1, \dots, n \exists \iint_{\Phi_j} F(x, y, z) d\sigma$$

// поверхность гладкая но неориентированная

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВЕКТОРНОГО РОДА

$\Phi = z(G)$ - параметр. заданная пов-ть; $\bar{A} \subset \bar{G}$, A внутренне

$\vec{n}$ - непрерывное поле нормалей единичной длины на G ориент. 2-х переменных

$\vec{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ определены на Φ_A

$(\vec{a}, \vec{n})$ - скаляр

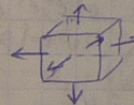
$\iint_{\Phi_A} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$ называется поверхностным интегралом 2-го рода (если интеграл $\exists$)

Свойство поверхностных интегралов 2-го рода: при изменении ориентации ($\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$) интеграл 2-го рода меняет знак.

Замечание Если $\Phi = \bigcup_{j=1}^n \Phi_j$ кусочно-гладкая, $\vec{n}_j$ - непрерывное поле нормалей на Φ_j , то

$$\iint_{\Phi_A} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \sum_{j=1}^n \iint_{\Phi_j} (\vec{a}, \vec{n}_j) d\sigma$$

Можно определить интеграл 2-го рода по ориентированной, компактной, гладкой поверхности $\Phi = \bigcup_{j=1}^n \Phi_j$, $\vec{n}$ - нормали,



$$\iint_{\Phi_A} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \sum_{j=1}^n \iint_{\Phi_j} (\vec{a}, \vec{n}_j) d\sigma$$

значение суммы не зависит от способа разбиения.

Пусть $\vec{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$\Phi = \{z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, $f \in C^1(D)$, $A \subset D$, A внутренне

$\vec{n}$ указывает наружу (направление оси z)

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$

$$\iint_{\Phi_A} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_A (P(x, y), Q(x, y), R(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy = \iint_A (P(x, y), Q(x, y), R(x, y)) dx dy$$

Еще одно обозначение

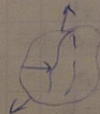
для интеграла 2-го рода: $\iint_{\Phi_A} R(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + P(x, y, z) dx dy$

и еще одно...: если $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \Rightarrow \iint_{\Phi_A} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Phi_A} (P(x, y, z)n_x + Q(x, y, z)n_y + R(x, y, z)n_z) d\sigma$

/* Обычно */

Замечание если $\Phi = \partial V$ (Φ - граница области V , V - область $\cdot$), Φ - гладкая пов-ть

$\Rightarrow \Phi$ ориентирована и обычно в качестве нормалей к Φ берут внешние нормали.



Биртогональные базисыПусть e_1, e_2, e_3 - базис в $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{e_i\}$ Опр. Базис $\{e_i\}$ называется биртогональным к $\{e_i\}$, если

$$(e_i, e^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Утв. 1. Для любого базиса $\{e_i\} \exists!$ базис $\{e^i\}$, биртогональный к $\{e_i\}$.Доказ. $e_1 \perp e_2, e_1 \perp e_3 \Rightarrow e^1 = \lambda [e_2, e_3]$ (e^1 пропорционален векторному произведению)

$$(e_1, e^1) = 1 \Rightarrow \lambda (e_1, [e_2, e_3]) = 1$$

т.к. $\{e_i\}$ - базис то $\forall \square$, построенного на векторах e_2, e_3 ,

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{(e_1, [e_2, e_3])} \Rightarrow e^1 = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, [e_2, e_3])} \text{ - определен однозначно.}$$

Аналогично

$$e^2 = \frac{[e_3, e_1]}{(e_2, [e_3, e_1])}, \quad e^3 = \frac{[e_1, e_2]}{(e_3, [e_1, e_2])}$$

Покажем, что e^1, e^2, e^3 ЛНЗ. $\square \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 = 0$. Умножим скалярно на e_i

$$\Rightarrow \alpha_i (e_i, e^j) = 0 \Rightarrow \alpha_i \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0 \Rightarrow \{e^i\} \text{ - базис}$$

Замечание 1 $\{e_i\}$ биртогонален к $\{e_i\} \Rightarrow \{e_i\}$ бирт.Замечание 2 Если $\{e_i\}$ - декартовОртонорм. базис (ОНБ), то $e^i = e_i, 1 \leq i \leq 3$ Преобразование базисов

(матричная форма записи) В выражении происходит суммирование по повторяющимся сверху и снизу индексам

$$\alpha_i e_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_j$$

 $\square \{e_i\}, \{e^i\}$ - 2 пары базисов в $\mathbb{R}^3$. Напишем формулу преобразования базисов.

$$e^i = b_{ij}^i e_j \quad (\text{т.е. } e^i = \sum_{j=1}^3 b_{ij}^i e_j), \quad \{b_{ij}^i\} \text{ - матрица перехода}$$

$$e_i = b_{ij}^i e^j, \quad \|b_{ij}^i\| \text{ и } \|b_{ij}^i\| \text{ взаимно обратны}$$

$$b_{ij}^i b_{ij}^i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

 $\square \{e^i\}, \{e^i\}$ - бирт. базис к $\{e_i\}, \{e_i\}$

$$e^i = g_{ij}^i e^j, \quad \|g_{ij}^i\| \text{ и } \|g_{ij}^i\| \text{ взаимно обратны}$$

$$e^i = g_{ij}^i e^j$$

$$\text{Утв. 2 } b_{ij}^i = c_{ij}^i, \quad b_{ij}^i = c_{ij}^i, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

$$\text{Доказ. } (e_i, e^j) = (b_{ij}^i e_i, e^j) = b_{ij}^i (e_i, e^j) = b_{ij}^i \delta_{ij} = b_{ij}^i$$

$$(e_i, e^j) = c_{ij}^i (e_i, e^j) = c_{ij}^i \delta_{ij} = c_{ij}^i, \text{ т.е.}$$

Аналогично получим $b_{ij}^i = c_{ij}^i$.Инварианты линейного оператора $\square A$ - линейный оператор в $\mathbb{R}^3$ Опр. $(e^i, A e^i) = \text{div } A$
ДИВЕРГЕНЦИЯ ОПЕРАТОРА A

$$[e^i, A e^i] = \text{rot } A \quad \parallel \sum_{i=1}^3 (e^i, A e^i)$$

РОТОР ОПЕРАТОРА A

Проверка корректностиПусть $\{e^i\}$ - другой базис. Покажем, что $(e^i, A e^i) = (e^i, A e^i)$

$$(\text{аналогично } [e^i, A e^i] = [e^i, A e^i])$$

$$(e^i, A e^i) = (b_{ij}^i e^j, A b_{ij}^i e^j) = b_{ij}^i b_{ij}^i (e^j, A e^j) = \delta_{ij}^i (e^j, A e^j) = (e^i, A e^i)$$

т.е. суммирование по i, j ! По всем i и индексам.* Выразим $\text{div } e_i$ произ. базиса *Пусть A - матрица A в базисе $\{e_i\}$

$$\|A\|$$

$$A e_i = a_j^i e_j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{div } A = (e^i, A e_i) = (e^i, a_j^i e_j) = a_j^i (e^i, e_j) = a_j^i \delta_{ij} = a_i^i$$

Пусть $\{e_i\}$ - декартов базис, $e^i = e_i, 1 \leq i \leq 3$

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$$

$$\text{rot } A = [e^i, A e_i] = a_j^i [e^i, e_j] = e_1 (a_2^3 - a_3^2) + e_2 (a_3^1 - a_1^3) + e_3 (a_1^2 - a_2^1)$$

$$\text{rot } A = (a_2^3 - a_3^2, a_3^1 - a_1^3, a_1^2 - a_2^1)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ $u(x, y, z)$ - скалярна в $\mathbb{R}^3, M \in \mathbb{R}^3$ Тогда u дифференцируема в точке M , если $\Delta u = \alpha_1 \alpha x + \alpha_2 \alpha y + \alpha_3 \alpha z + O(\alpha^2)$,
 $\{ \Delta u - u(x+\alpha x) - u(z) \}$ - координата точки $M (x, y, z)$, $\alpha^2 = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ это предельное единично, при этом $\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial z}$

$$\Delta u = (\alpha_1, \alpha_2) + O(\alpha^2), \text{ где } \alpha = \text{grad } u_M$$

Определение u дифференцируема в т. M , если $\Delta u = (\alpha, \alpha^2) + O(\alpha^2)$ действительно, если u дифр. в т. M , то (*) верно и справедливо, причем

$$\alpha = \text{grad } u_M$$

Обратно: если есть (*), то в декартовых координатах $\Delta u = \alpha_1 \alpha x + \alpha_2 \alpha y + \alpha_3 \alpha z + O(\alpha^2)$

$$\{ \alpha = (x, y, z), \alpha^2 = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \} \Rightarrow u \text{ дифр.}$$

т.е. $\text{grad } u_M$ не зависит от выбора декартовых координат

$$\bar{e} \text{ - вектор единичн. длины } \frac{\partial u}{\partial \bar{e}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(M+h\bar{e}) - u(M)}{h}$$

Если u дифференцируема в M , то $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{grad } u, h\vec{e}) + O(h)}{h} = (\text{grad } u, \vec{e})$

Пусть $\vec{a}$ - векторное поле в области D
(в декартовых координатах (x, y, z)) $\vec{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

Определение 1

$\vec{a}$ дифференцируема в точке $M \in D$, если P, Q, R дифференцируемы в точке M .

$$\Delta \vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{grad } P, \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|) \\ (\text{grad } Q, \Delta \vec{r}) + \bar{O}_2(|\Delta \vec{r}|) \\ (\text{grad } R, \Delta \vec{r}) + \bar{O}_3(|\Delta \vec{r}|) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial Q}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial R}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial R}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial R}{\partial z} \Delta z \end{pmatrix} = A \cdot \Delta \vec{r} + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|) =$$

$$\bar{O}(|\Delta \vec{r}|) = \begin{pmatrix} \bar{O}_1(|\Delta \vec{r}|) \\ \bar{O}_2(|\Delta \vec{r}|) \\ \bar{O}_3(|\Delta \vec{r}|) \end{pmatrix} = A \Delta \vec{r} + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|)$$

линейный оператор с матрицей в декарт. базисе (x, y, z)

Определение 1' $\vec{a}$ дифференцируема в M , если $\Delta \vec{a} = A \Delta \vec{r} + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|)$

Если P, Q, R дифференцируемы в $(\cdot) M \Rightarrow (**)$ определено в декартовом базисе x, y, z

A - матрица оператора A

$$(**) \Rightarrow \Delta P, \Delta Q, \Delta R \text{ дифференцируемы, } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{м.к. } (***) \Rightarrow \end{array} \right. \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \Delta x + a_1^2 \Delta y + a_1^3 \Delta z \\ a_2^1 \Delta x + a_2^2 \Delta y + a_2^3 \Delta z \\ a_3^1 \Delta x + a_3^2 \Delta y + a_3^3 \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{O}_1(|\Delta \vec{r}|) \\ \bar{O}_2(|\Delta \vec{r}|) \\ \bar{O}_3(|\Delta \vec{r}|) \end{pmatrix}$$

Опр Пусть $\vec{a}$ дифференцируема в точке M

$$\text{div } \vec{a} = \text{div } A$$

$$\text{rot } \vec{a} = \text{rot } A$$

линейный оператор A (***)

В декартовых координатах (x, y, z) $\text{div } A = \text{tr } A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

// что же будет у нас с ротором?

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\left\{ \text{rot } A = (a_2^3 - a_3^2, a_1^3 - a_3^1, a_2^1 - a_1^2) \right\}$$

"множительная" (!) правило:

$$[\nabla, \vec{a}] = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Определение Пусть $\vec{e}$ - вектор единичной длины $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(M+h\vec{e}) - \vec{a}(M)}{h}$

// производная по направлению

Пусть $\vec{a}$ дифференцируема (или тогда!) в точке $M \Rightarrow (**)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(M+h\vec{e}) - \vec{a}(M)}{h} = d\vec{a}$$

Лекция 25

27.11.08

Повторные операции теории полей

$\vec{a}$ дважды дифференцируемо в области D ,

и дважды дифференцируемо в области D

// тогда всегда можно от него идти!

$\text{grad } u$	1	$\text{grad div } \vec{a}$	инвариантны (независ. от выбора базиса координат)
$\text{div } \vec{a}$	2	$\text{div grad } u$	
$\text{rot } \vec{a}$	3	$\text{div rot } \vec{a}$	
	4	$\text{rot rot } \vec{a}$	
	5	$\text{rot rot } \vec{a}$	

$\vec{a}(P, Q, R)$ тогда

$$1) \text{ grad div } \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{e}_3$$

$$2) \text{ div grad } u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

Оператор Лапласа.

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div rot } \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$$

матрица

$$4) \text{ rot grad } u = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\text{rot rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = i \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) +$$

$$+ j \cdot \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \right) +$$

$$+ k \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} \right) =$$

$$= i \left(-\Delta P + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right) + j \left(-\Delta Q + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right) + k \left(-\Delta R + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right) =$$

$$\text{div } \vec{a} \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a} \quad \text{или} \quad \text{div } \vec{a} \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a} \quad (\Delta \vec{a} = \Delta P, \Delta Q, \Delta R)$$

$\iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dV$ называется поток поля $\vec{a}$ через ориент. поверхность S

Формула Остроградского - Гаусса

Пусть G - область в R^3 , G ограничена, граница G - кусочно-гладкая поверхность (как мы определили раньше и выше)

На G заданы векторное поле $\vec{a}$ и нормаль $\vec{n}$ внешняя

$\vec{n}$ - внешняя нормаль к G , $\vec{a}(P, Q, R)$

$P, Q, R \in C(G)$, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в G , и продолжены до $\bar{G}$.

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iiint_G \text{div } \vec{a} dxdydz$$

$\frac{\partial G}{\partial t}$ "поток поля $\vec{a}$ через внешнюю нормаль"

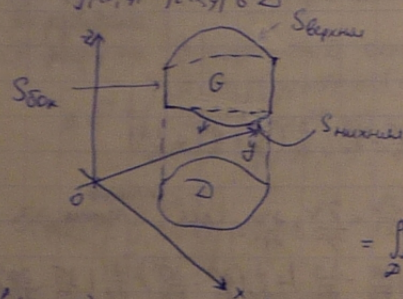
ФОРМУЛА Остроградского - Гаусса

Доказательство бури при талитном случае

1. Талитный случай

Г - выпуклая область в направлении оси z, т.е. $G = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$,

∂D - кусочно гладкая кривая, $f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, где $\bar{D}$ - замкнутость $\bar{D}$ $f_1(x, y) < f_2(x, y) \in \bar{D}$



Доказательство справедливости (8).

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iint_G \frac{dR}{dz} dx dy dz =$$

$$= \iint_D dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{dR}{dz} dz = \left\{ \text{по формуле Ньютона-Лейбница} \right\}$$

$$= \iint_D R(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, f_1(x, y)) dx dy$$

$$\{U_3(x)\} \iint_{\partial G} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{S_{\text{верх}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{S_{\text{низ}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{S_{\text{бок}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

$$\text{вектор } \begin{matrix} x=x \\ y=y \\ z=f_2(x, y) \end{matrix}$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \text{ н.к.}$$

$\vec{n}$ составили вектор угла S направлением (нормалью) оси z.

Г а(0,0,R)

$$\iint_{S_{\text{верх}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{S_{\text{верх}}} R \frac{1}{\left\| \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \right\|} d\sigma = \left\{ \text{выражая, что } d\sigma = \left\| \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \right\| dx dy \right\} = \iint_D R(x, y, f_2(x, y)) \cdot \frac{1}{\left\| \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \right\|} \left\| \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \right\| dx dy$$

$$= \iint_D R(x, y, f_2(x, y)) dx dy$$

нужно

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) \text{ нормаль направлена вниз}$$

$$\iint_{S_{\text{низ}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = - \iint_D R(x, y, f_1(x, y)) dx dy$$

доказательство справедливости - бок

На $S_{\text{бок}}$ $\vec{n} \perp \vec{Oz}$, т.е. $\forall (x, y) \in \partial D, (x = x_0, y = y_0, f_1(x_0, y_0) \leq z \leq f_2(x_0, y_0)) \in S_{\text{бок}}$

$$(\vec{a}, \vec{n}) = 0, \text{ т.е. } \vec{a} \parallel \vec{Oz} \rightarrow \iint_{S_{\text{бок}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{8} = \iint_{S_{\text{верх}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{S_{\text{низ}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{S_{\text{бок}}} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

строгого: гр-на (1) справедлива, пока $\vec{a}(P, Q, R)$,

G - выпуклая в направлении оси x^3 , т.е. $G = \{(x, y) \in D, f_1(x, y) < f_2(x, y)\}$,

∂D - кусочно гладкая, ∂ - ограничена

f_1, f_2 имеют непрерывные частные пр-е в окр $\bar{D}$, $f_1 < f_2$ в $\bar{D}$

(1) справедлива $\sigma(P, Q, R)$, G - выпуклая в направлении оси y

Пусть $\vec{a}(P, Q, R)$, $P, Q, R \in C(\bar{G})$, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрер. в G и продолжим до непрерывных в $\bar{G}$

G выпуклая относительно осей x, y, z . Тогда справедлива (8).

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$(P, Q, R) \rightarrow (0, Q, R) \rightarrow$ и т.д. можно применить к-му Гаусса. Тогда

$$\iint_G \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iint_G (\vec{a}_1, \vec{n}) d\sigma + \iint_G (\vec{a}_2, \vec{n}) d\sigma + \iint_G (\vec{a}_3, \vec{n}) d\sigma \quad \{i=1, 2, 3\}$$

↓ симметрично по выч z

$$\iint_G \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iint_G (\vec{a}_3, \vec{n}) d\sigma$$

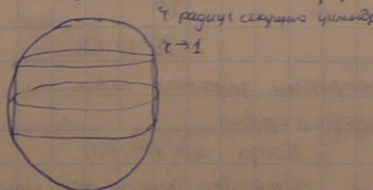
Для сферы (или любого покрывающего, как правило, области, между двумя графиками), отсюда $\vec{n}$ и плоскостей xy ограничить по норм, т.е.

$$\partial G: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} (-x, -y, 1)$$

$$G: x^2 + y^2 + z^2 < 1 \quad D: x^2 + y^2 < 1 \quad \text{Заметим, что } \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ не определены.}$$

Но формула (8) остается справедливой

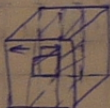
(можно просто применить предельный переход)



Еще одно обобщение

G можно "разрезать" по конечной число частей, выпуклых относительно осей x, y, z

$$\vec{a} = (P, Q, R) + (0, Q, R) + (P, 0, R)$$



Если $\vec{a}(x, y, z) = \vec{e}$, то $\operatorname{div} \vec{a} = 3 \left(= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right)$

$$\Downarrow$$

$$V(G) = \iiint_G dx dy dz = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} (\vec{e}, \vec{n}) d\sigma$$

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iint_{\partial G} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

Пример 1

Опр $\vec{a}$ — непрерывно дифференцируемое поле, определено на $D \subset \mathbb{R}^3$

$\vec{a}$ называется соленоидальной, если $\forall S$ — ориентированная замкнутая гладкая поверхность

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = 0$$

Если $\vec{a}$ — соленоидальна в D , то $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ в D . Иначе $\exists M \in D$ — $\operatorname{div} \vec{a}|_M \neq 0$

$\exists B$ — шар с центром в точке M : $\operatorname{div} \vec{a}|_B > \epsilon > 0$

(или $-\epsilon < \operatorname{div} \vec{a}|_B < 0$)

$$\Rightarrow \iint_{\partial B} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \vec{a} d\sigma \neq 0 \text{ — противоречие}$$

Пример $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \operatorname{div} \vec{a} = 0, S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \vec{n} \text{ — внешняя нормаль}$$

$$\vec{n}(x, y, z) = \vec{r}$$

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} d\sigma = \iint_S d\sigma = 4\pi \neq 0$$

Если D такая, что любая замкнутая гладкая поверхность S целиком лежит в области G , где $G \subset D$, то $\operatorname{div} \vec{a} = 0 \Rightarrow$ поле $\vec{a}$ соленоидально (интеграл по $\forall$ поверхности = 0)

(вспоминаем теорему)



Лекция 26

29.11.08

Пусть G — область в $\mathbb{R}^3$, $\Phi = \vec{r}(G)$ — параметрически заданная поверхность

Возьмем кривую $\Gamma = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} t \in [a, b]$ — гладкая кривая

$$\Gamma = \vec{r}(t), \text{ т.е. } \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) = x(t) \\ y = y(u(t), v(t)) = y(t) \\ z = z(u(t), v(t)) = z(t) \end{cases}$$

Тогда $x(t), y(t), z(t)$

непрерывно дифференцируемы как функции.

$\Rightarrow \Gamma$ — гладкая кривая $t \in [a, b]$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} v'(t) \neq 0, \text{ т.к. } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \text{ — линейно независимы, } u'(t) \text{ и } v'(t) \text{ не обращаются одновременно в 0.}$$

Если $\Phi = \{z = f(x, y), (x, y) \in D\}, f \in C^1(D)$,

$\Gamma(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \subset \Phi$, то $\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — гладкая кривая

$$x(t), y(t) \text{ — непрерывно дифференцируемы}$$

$$0 \neq \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \end{pmatrix}$$

Если $x'(t) = y'(t) = 0 \Rightarrow z'(t) = 0 \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0 \Rightarrow \gamma(t)$ — гладкая кривая

Формула Стокса

Пусть $\Phi = \vec{r}(G)$ — параметрически заданная поверхность

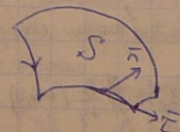
$D \subset G$, D — область, $\partial D = \{\text{граница } D\}$ — кусочно-гладкая

$S = \vec{r}(D)$ — участок поверхности

$\partial S = \vec{r}(\partial D)$ — кусочно-гладкая кривая, ∂S — край

Возьмем $\vec{n}$ — непрерывные поле нормалей на S

$\vec{e}$ — касательный вектор единичной длины на ∂S , $\vec{e}$ выбираем так, что при обходе вдоль граница поверхности остается слева, если смотреть с конца нормали.



Зададим векторное поле $\vec{a}$ (то, по чему мы будем интегрировать).

$\vec{a}$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле (т.е. $\vec{a}(P, Q, R)$, P, Q, R — непрерывно дифференцируемы в окрестности $\vec{r} = S \cup \partial S$).

Тогда справедлива формула Стокса:

$$\int_{\partial S} (\vec{a}, \vec{e}) ds = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

ФОРМУЛА
СТОКСА

инвариантность интеграла относительно выбора координат (т.е. относительность координат инвариантно скалярное произведение)

В декартовых координатах $\iint_S A dx + Q dy + R dz =$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \right| \text{ — если } z = \text{const} \Rightarrow \text{Ф-на Грина}$$

1. Тривиальный случай: существует декартова система координат

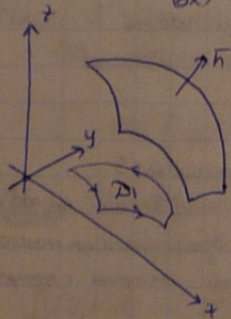
S однозначно проектируется на каждую из координатных плоскостей, т.е.

$S = \{z = f_1(x, y), (x, y) \in D\}$, $\bar{S} = \{x = f_2(y, z), (y, z) \in D_2\}$, $\bar{S} = \{y = f_3(x, z), (x, z) \in D_3\}$,
 D_1, D_2, D_3 - ограниченные области с криволинейными границами,
 f_1, f_2, f_3 - непрерывны в окрестности D_1, D_2, D_3 .

Итак, что $\int_{D_1} P dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma$

Аналогично $\int_{D_2} Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \gamma \right) d\sigma$, $\int_{D_3} R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial y} \cos \beta \right) d\sigma$

$\vec{n} = \frac{(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2}}$, т.е. $\vec{n}$ составляет острый угол с осью Oz .



$\partial S: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ - границы D_1 отображены на D_1 , остается кривая.

$$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma = \iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial z} \bigg|_{z=f_1(x,y)} \cdot \left(\frac{-\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2}} \right) -$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y} \bigg|_{z=f_1(x,y)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2}} \right) \cdot \sqrt{1 + (\frac{\partial f_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2} dx dy = \int_{\partial D_1} P(x, y, f_1(x, y)) dx dy =$$

$$= \int_{\partial D_1} P(x, y, f_1(x, y)) dx = \int_{\partial S} P(x, y, z) dx$$

Улб 1 $[N \in \bar{D},] M \in \partial D$ - ее образ. Тогда существует такая окрестность W_N точки N , $W_N \in G$: существует декартова система координат, в которой $S_N = \bar{S}(W_N)$, однозначно проiett. на координатную плоскость.

Доказ-во: Возьмем декартову систему координат x, y, z , в которой $\vec{r}(M)$ составляет равный острый угол с осью координат

$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(y,z)} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,z)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(y,z)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(y,z)} \right)^2}}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,z)} + 0, \frac{\partial(z,x)}{\partial(y,z)} + 0, \frac{\partial(x,y)}{\partial(y,z)} + 0$$

Аналогично докажем, что параметрически заданная поверхность является каждой

$\exists W_1(N). \bar{S}(W_1(N)) = \{z = f_1(x, y), (x, y) \in D_1\}$
 $\exists W_2(N). \bar{S}(W_2(N)) = \{y = f_2(x, z), (x, z) \in D_2\}$
 $\exists W_3(N). \bar{S}(W_3(N)) = \{x = f_3(y, z), (y, z) \in D_3\}$

$W(N)$ - открытая окр. с центром O точке N ;

$W(N) \subset W_1(N) \cap W_2(N) \cap W_3(N)$

S_N - удовлетворяет условиям, ∂S_N - граница круга;
 граница проiett. S_N на координатные плоскости - тоже гладкая кривая
 // поверхности $S, \gamma = 0$, можно разбить на много маленьких кружочков, и в V взять свою систему координат.

Улб. 2 $\exists \delta > 0: \forall Q \subset \bar{S}, \text{diam } Q < \delta, \exists N, W_N$ удовлетворяет условиям 1. $Q \subset W_N$

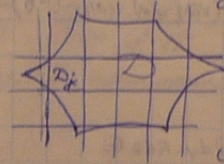
Доказ-во: предположим противное $S = \frac{1}{N}, \exists Q_k \subset \bar{S}, \text{diam } Q_k < \frac{1}{k}: \forall N, W_N$ удовлетворяет условиям 1, $Q_k \not\subset W_N$
 $P_k \subset Q_k$, можно $P_k \rightarrow N' \in \bar{S}$. Но тогда $\exists Q_k \subset W_{N'}, \forall Q_k$ - противоречие.

Докажем, что сформулировка эти условия параметрически заданной поверхности

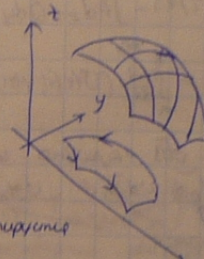
Доказ-во: $\delta > 0, S$ удовлетв. улб. 2

S разобьем на конечное число криволинейных кружков:

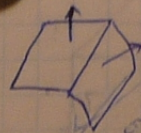
$\bar{S} = \bigcup_{i=1}^n \bar{S}_i, \bar{S}_i$ - компакт, $\partial \bar{S}_i \cap \partial \bar{S}_j = \emptyset, i \neq j$
 $\partial \bar{S}_i$ - криволинейная $\text{diam } \bar{S}_i < \delta, \bar{S} = \bigcup_{i=1}^n \bar{S}_i, \bar{S}_i = \bar{S} \cap \bar{S}_i$
 $S_i = \bar{S}_i \cap S \rightarrow S \cap \bar{S}_i = \emptyset$



Для каждого S_i выберем свою систему координат: S_i однозначно проiett. на координатную плоскость.



$\iint_S (rot a, n) d\sigma$



// Все эти формулы - Остроградский-Гаусс
 где H - дивергенция, Tri - спина, Sp - на осевых dx, dy, dz и т.д. не формулы!
 // (применяемость)

$f(x)$
 $P dx + Q dy + R dz$
 $a_1 dy dz + a_2 dz dx + a_3 dx dy$

$B dx dy dz$

Формула (тогда имеет такой вид:
 $\int_{\partial \Omega} \omega = \iint_{\Omega} d\omega$
 интеграл по границе дифференциальной формы.

$\int df = f(b) - f(a)$

// Избавимся от ненужных частей от пути интегрирования

4.12.08

Лекция 27

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Опр. Если векторное поле $\vec{a}$, определенное в области D , называется потенциальным, если $\exists U: \vec{a} = \text{grad } U|_D$.

Указывает потенциал $\vec{a}$.

Утв. Пусть $\vec{a}$ непрер. в D . Тогда следующие условия эквивалентны.

1. $\vec{a}$ потенциально в D ,

2. $\forall A, B \in D \quad \int_{AB} (a, \tau) ds$ (τ — касательный вектор единичной длины)

не зависит от формы кривой AB .

При этом $\int_{AB} (a, \tau) ds = U(B) - U(A)$, где U — потенциал $\vec{a}$.

Доказательство: 1) $\rightarrow$ 2) $\vec{a}(P, Q, R)$, $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$.

Пусть $\overline{AB}$ — гладкая кривая: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a, b], \quad A = (x(a), y(a), z(a)), \quad B = (x(b), y(b), z(b))$

$$\int_{AB} (a, \tau) ds = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} (x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} (x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z} (x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (U(x(t), y(t), z(t))) dt = U(x(b), y(b), z(b)) - U(x(a), y(a), z(a)) = U(B) - U(A)$$

Пусть $\overline{AB}$ — криво-гладкая. $\vec{a}_0 = \vec{a}_1, \vec{a}_1 = \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1} = \vec{a}_n = \vec{a}$

$\overline{AB} = \overline{A_0 A_1} \cup \overline{A_1 A_2} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1} A_n}$
↑
гладкая кривая

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \sum_{j=1}^n \int_{A_{j-1} A_j} P dx + Q dy + R dz \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (U(A_j) - U(A_{j-1})) = U(A_n) - U(A_0) = U(B) - U(A)$$

2) $\rightarrow$ 1) Фиксируем $M_0 \in D$

$$U(M) = \int_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz$$

Покажем. $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ (аналогично $\frac{\partial U}{\partial y} = Q, \frac{\partial U}{\partial z} = R$)

$$M(x, y, z) \quad M + \Delta M = (x + \Delta x, y, z)$$

$$\frac{U(M + \Delta M) - U(M)}{\Delta x} = \int_{M_0 M + \Delta M} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz \quad \left. \begin{array}{l} t \in [x, x + \Delta x], \quad x = t \\ y = y, \quad z = z \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} P(t, y, z) dt = \frac{1}{\Delta x} \cdot P(\xi, y, z) \cdot \Delta x$$

формула среднего значения ξ между x и $x + \Delta x$

$$\text{Т.О.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(M + \Delta M) - U(M)}{\Delta x} = P(x, y, z) \Rightarrow \vec{a} = \text{grad } U|_D$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}$$

Пусть $P, Q, R \in C^1(D)$.

Если $\vec{a}$ потенциально, то $\vec{a} = \text{grad } U \Rightarrow \text{rot } \vec{a} = \text{rot grad } U = 0$

Определим. Поле $\vec{a}$ называется безвихревым в области D , если $\text{rot } \vec{a} = 0$.

Необходимое условие потенциальности

$$a \in C^1(D), \vec{a} \text{ — потенциально} \Rightarrow \text{rot } \vec{a} = 0 \quad (\text{т.е.} \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

В D необходимо достаточно выполнение этих условий.

Замечание. На плоскости, если $\vec{a}$ потенциально $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Обратное не всегда верно, т.к. $\text{rot } \vec{a} = 0 \nRightarrow \vec{a}$ — потенциально.

Пример

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \quad (\text{или } \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0, y=0\} \text{ — т.е. } \mathbb{R}^2 \text{ без осей } x \text{ и } y)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad (\text{или } \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

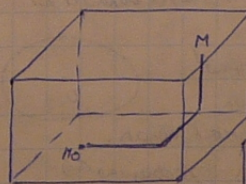
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \vec{a} \text{ — безвихревое}$$

Если $\vec{a}$ потенциально, то $\oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$ ($x^2+y^2=1, z=0$)

$$0 = \int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin \varphi (-\sin \varphi)}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Но для замкнутой кривой, когда область криволинейна — противоречие ($0 \neq 2\pi$)

Утв. Пусть D — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^3$, $\vec{a} \in C^1(D)$, $\text{rot } \vec{a} = 0$. Тогда $\vec{a}$ — потенциально.



$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in D \quad M(x, y, z) \quad \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{matrix}$$

$$U(M) = \int_{M_0 M} P(x, y, z) dx + \int_{M_0 M} Q(x, y, z) dy + \int_{M_0 M} R(x, y, z) dz$$

$$\text{Покажем что } \frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \frac{\partial U}{\partial z} = R$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\partial I_2}{\partial x} + \frac{\partial I_3}{\partial x} \quad \frac{\partial I_1}{\partial x} = P(x, y_0, z_0)$$

$$I_2 = \int_{y_0}^y dt \left(Q(x_0, t, z_0) + \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x}(s, t, z_0) ds \right) = \int_{y_0}^y dt \left(Q(x_0, t, z_0) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^t ds \frac{\partial Q}{\partial x}(s, t, z_0) \right) = \int_{y_0}^y Q(x_0, t, z_0) dt + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(s, t, z_0) dt ds$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 + \int_{x_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z_0) dt$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t) dt = \int_{z_0}^z \frac{\partial P}{\partial t}(x, y, t) dt = P(x, y, z) - P(x, y, z_0)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial x} = P(x, y, z)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial T_2}{\partial y} = Q(x, y, z_0), \frac{\partial T_3}{\partial y} = \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, t) dt = \int_{z_0}^z \frac{\partial Q}{\partial t}(x, y, t) dt = Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y, z), \frac{\partial U}{\partial z} = R(x, y, z)$$

Существование функции. Если $\omega \in C(\bar{D})$, D — односвязная область, то $\omega \circ \bar{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \bar{\alpha}$ — потенциально

D — односв. область, односвязная и $\neq \emptyset$ точка, носитель "стационар" в D , не выходя за пределы области.

Пусть $f(t) = \begin{cases} y=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases}, t \in [a, b], x, y, z \in C[a, b], f(a) = f(b).$

$f(t)$ можно считать в точку (в области D), если $\exists F(t, s)$:

$$[a, b] \times [0, 1] \rightarrow D, F \in C([a, b] \times [0, 1]),$$

$$F(t, 0) = f(t), \text{ точка}$$

$$F(t, 1) = N \in D$$

$$F(a, s) = F(b, s), s \in [0, 1]$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_s(t) = F(t, s) \text{ — непрерывный контур}$$



Область D называется односвязной, если $\forall$ замкнутой контур, принадлежащий D можно стянуть в точку (в области D).

$R^2 \setminus \{0\}$ — не односвязна!

Шаровый лист — односвязная область

$\alpha^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — односв. область.



316-я

Критерий определения. Если D — др. область $\subset R^2$, то D — односвязная $\Leftrightarrow$

∂D имеет (т.е. состоит из одн. конт. связн.